III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Si $f\colon X \to Y$ est la section nulle du fibré π, (de sorte que le A de la proposition 8 est vide), il est alors évident que f ne se relève pas, car cela impliquerait que le revêtement $E \to Y_{\text{sing}} = f(X)$ soit trivial.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Y} \arrow[d, "\nu_X"] \\ X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Soient n et q des entiers, avec n positif et $q \leqslant n$. Nous noterons $A_{n,q}$ la *surface* $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q}\}$.

Si $n = 1$, les surfaces ainsi définies sont toutes lisses: l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy^{1-q})$ de $\mathbf{C}^3$ applique $A_{1,n}$ sur l'hyperplan d'équation $z = 0$. De même, si $q = n$, l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x - z^n, y, z)$ applique $A_{n,n}$ sur l'hyperplan d'équation $x = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 2$ et $q < n$ sauf mention expresse du contraire.

Si $q = n - 1$, les dérivées partielles du polynôme $z^n - xy^{n-q} = z^n - xy$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, et $A_{n,n-1}$ est lisse en dehors de ce point (donc normale en vertu d'un théorème d'Oka rappelé en II.2). Si $q \leqslant n - 2$, la surface $A_{n,q}$ est lisse en dehors de la droite d'équations $y = z = 0$; nous vérifions ci-dessous que ces points sont effectivement tous singuliers; la proposition 7 montre donc que $A_{n,q}$ n'est pas normale.

Soit $G_{n,q}$ le groupe des isomorphismes de C^2 de la forme $(s, t) \mapsto (\zeta^q s, \zeta t)$ où ζ est une racine n-ième de l'unité; c'est un *groupe cyclique* d'ordre n. Nous noterons $X_{n,q}$ l'*ensemble des orbites*, muni de sa structure canonique d'ensemble analytique normal.

Si $q = 0$, l'ensemble $X_{n,0}$ est lisse: l'application $(s, t) \mapsto (s, t^n)$ passe au quotient et définit un isomorphisme de $X_{n,0}$ sur $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})) \approx \mathbf{C}^2$. Les espaces $X_{n,q}$ et $X_{n,q'}$ sont évidemment identiques si $q' \equiv q$ (modulo n); il suffit donc d'étudier les $X_{n,q}$ pour lesquels $1 \leqslant q < n$ (voir de plus la proposition 13).

Considérons le morphisme $\tilde{\phi}_{n,q}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ défini par $\tilde{\phi}_{n,q}(s, t) = (s^n, t^n, st^{n-q})$; son image est dans $A_{n,q}$ et il définit par passage au quotient un morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$. Nous écrirons aussi $\tilde{\phi}$ et ϕ au lieu de $\tilde{\phi}_{n,q}$ et $\phi_{n,q}$.

PROPOSITION 9. Le morphisme ϕ induit un *homéomorphisme* de l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ sur $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid y \neq 0\}$. Si n et q sont premiers entre eux, ϕ lui-même est un homéomorphisme de $X_{n,q}$ sur $A_{n,q}$.

Preuve. Montrons d'abord que $\tilde{\phi}$ est surjectif et que l'image inverse par $\tilde{\phi}$ de tout point autre que l'origine est formée de n points.

Soit $P = (x, y, z) \in A_{n,q}$ avec $y \neq 0$. Choisissons une racine n-ième t de y et posons $s = zt^{-n+q}$. Alors

$$\tilde{\phi}(s, t) = (z^n y^{-n+q}, y, z) = (x, y, z).$$

Soit $(s', t') \in \mathbf{C}^2$ avec $\tilde{\phi}(s', t') = \tilde{\phi}(s, t)$. Il existe des racines n-ièmes ζ et η de l'unité avec $s' = \zeta s$, $t' = \eta t$ et $\zeta\eta^{n-q} = 1$. Par suite $\tilde{\phi}^{-1}(P)$ a n points.

Soit $Q = (x, 0, 0) \in A_{n,q}$ avec $x \neq 0$. Choisissons une racine n-ième s de x. Alors $\tilde{\phi}^{-1}(Q) = \{(\zeta s, 0) \in \mathbf{C}^2 \mid \zeta \in \mathbf{C} \text{ et } \zeta^n = 1\}$ a n points.

Le groupe $G_{n,q}$ agit librement sur $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$, et même sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ lorsque n et q sont premiers entre eux. Il en résulte que la restriction de ϕ à l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ est injective dans tous les cas, et que ϕ lui-même est une bijection si $(n, q) = 1$.

Montrons par exemple que ϕ est un homéomorphisme si $(n, q) = 1$. Pour tout nombre réel positif r, soient K_r l'image dans $X_{n,q}$ de

$$\{(s,t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| \leqslant r \text{ et } |t| \leqslant r\}$$

et L_r l'intersection avec $A_{n,q}$ de

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid |x| \leqslant r^n, |y| \leqslant r^n, |z| \leqslant r^{1+n-q}\}.$$

La restriction de ϕ à K_r est une bijection continue du compact K_r sur le compact L_r; c'est donc un homéomorphisme. Par suite, ϕ est un homéomorphisme. ∎

COROLLAIRE. Si $(n, q) = 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière à l'origine.*

Preuve. Pour tout $r > 0$, le complémentaire de l'origine dans L_r est homéomorphe au complémentaire du point central dans K_r. Il se rétracte donc par déformation sur l'espace lenticulaire que définit l'action de $G_{n,q}$ sur une petite sphère $\mathbf{S}^3$ centrée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. (L'intérieur de L_1 est donc un bon voisinage de l'origine dans $A_{n,q}$ au sens de la section II.1.) En particulier, le groupe fondamental du complémentaire de l'origine dans L_r n'est pas trivial. ■

Remarquons que c'est aussi un corollaire immédiat de la proposition 9 que $(A_{n,q})_{\text{rég}}$ est « connexe à l'origine »: $(L_r)_{r\in\mathbf{R}_+^*}$ est une base de voisinages de l'origine dans $A_{n,q}$ et $L_r \cap (A_{n,q})_{\text{rég}}$ est connexe pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$. D'autre part, il est facile de vérifier que le polynôme $z^n - xy^{n-q}$ est irréductible dans ${}_2\mathcal{O}[z]$, donc aussi dans ${}_3\mathcal{O}$ (voir [8], lemme II.B.5). On vérifie ainsi un cas particulier d'une affirmation énoncée à la section II.1.

PROPOSITION 10. Supposons $q \leqslant n - 2$. Soient $c \in \mathbf{C}^*$ et $Q = (c, 0, 0) \in A_{n,q}$. Alors le voisinage $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\}$ de Q dans $A_{n,q}$ est isomorphe au produit direct du disque $D = \{\xi \in \mathbf{C} \mid |\xi| < 1\}$ et de la courbe plane $\gamma = \{(y, z) \in \mathbf{C}^2 \mid z^n = y^{n-q}\}$.

Preuve. Soit $\rho: D \to \mathbf{C}$ la fonction holomorphe définie par $\rho(\xi)^n = 1 + \xi$ pour tout $\xi \in D$ et $\rho(0) = 1$. Soit d une racine $(n-q)$-ième de $1/c$. Considérons l'application $\alpha: D \times \gamma \to \mathbf{C}^3$ définie par $\alpha(\xi, y, z) = (c(1+\xi), dy, \rho(\xi) z)$. Pour tout $(\xi, y, z) \in D \times \gamma$, on a

$$(\rho(\xi) z)^n - c(1+\xi)(dy)^{n-q} = (1+\xi)(z^n - y^{n-q}) = 0 .$$

Par suite α définit un morphisme

$$D \times \gamma \to \{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\} .$$

qui applique $(0, 0, 0)$ sur Q et d'inverse donné par

$$(x, y, z) \mapsto (c^{-1}x - 1, d^{-1}y, (\rho(c^{-1}x - 1))^{-1} z) . \blacksquare$$

COROLLAIRE. Supposons $q \leqslant n - 2$. Si $(n, q) \neq 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière en tout point de l'axe* d'équations $y = z = 0$. Si $(n, q) = 1$, c'est une variété topologique au voisinage de Q qui n'est pas normale en Q.

Preuve. Si $(n, q) \neq 1$, la courbe γ a plusieurs branches à l'origine; les intersections de petites sphères centrées à l'origine dans $\mathbf{C}^2$ avec

$\gamma - \{0\}$ ne sont donc pas connexes et $A_{n,q}$ est bien topologiquement singulière en Q. Si $(n, q) = 1$, la surface est une variété topologique au voisinage de Q en vertu du corollaire à la proposition 3. Reste à montrer que $D \times \gamma$ n'est pas normal. Cela résulte de la proposition 7, ou de l'argument direct qui suit.

Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $an + b(n-q) = 1$, et $\psi: D \times \gamma \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\psi(\xi, y, z) = \begin{cases} y^a z^b & \text{si} \quad yz \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = z = 0 \end{cases}$. Alors ψ n'est pas holomorphe, mais ψ^n l'est car $\psi(\xi, y, z)^n = y$. L'anneau des germes en Q de fonctions holomorphes n'est donc pas intégralement clos. ■

PROPOSITION 11. Pour tout couple (n, q) avec $n \geqslant 2$ et $q \leqslant n - 1$, le morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$ est la normalisation de $A_{n,q}$. C'est un isomorphisme si et seulement si $q = n - 1$.

Preuve. Cela résulte de ce qui précède et du théorème de Cartan rappelé à la section II.1. ■

On pourrait montrer que les surfaces $A_{n,q}$, $A_{n,q-n}$, $A_{n,q-2n}$, ... sont non isomorphes deux à deux; par suite, $X_{n,q}$ est la normalisation d'une infinité d'ensembles analytiques distincts.

III.2. LES DISCRIMINANTS DES $A_{n,q}$ ET LES OUVERTS $A_{n,q}^{**}$

Soient à nouveau n et q des entiers avec $n \geqslant 2$ et $q < n$. Notons $F \in {}_2\mathcal{O}[z]$ le polynôme $z^n - xy^{n-q}$. A un facteur numérique près, son discriminant est une puissance de xy^{n-q}. Soient en effet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines, qui sont dans une extension convenable du corps des quotients de ${}_2\mathcal{O}$; alors

$$\operatorname{Dis}(F) = \prod \frac{\partial F}{\partial z}(\lambda_j) = \prod n\lambda_j^{n-1} = (\prod n\lambda_j^n)(\prod \lambda_j)^{-1}$$

$$= n^n (xy^{n-q})^n (-1)^n F(x, y, 0)^{-1} = (-1)^{n-1} n^n (xy^{n-q})^{n-1}$$

(tous les produits étant sur j de 1 à n). Comme à la section II.2, désignons par $\pi: A_{n,q} \to \mathbf{C}^2$ la restriction à $A_{n,q}$ de la projection canonique $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Nous noterons $\mathbf{C}^{**}$ l'espace $\mathbf{C}^2$ privé du lieu discriminant $\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy = 0\}$ et $A_{n,q}^{**}$ l'image inverse par π de $\mathbf{C}^{**}$. La proposition 7 ou un examen direct montre que π se restreint en un revêtement holomorphe à n feuilles

$$\pi^{**}: A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}.$$