IV.1. DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

IV. RÉSOLUTIONS DES QUOTIENTS DE $\mathbf{C}^2$ PAR UN GROUPE CYCLIQUE FINI

IV.1. Définitions et premiers exemples

Si X est un ensemble analytique, une *résolution* [1]) de X est la donnée d'une variété complexe lisse $\tilde{X}$ et d'une application holomorphe propre surjective $\rho: \tilde{X} \to X$ ayant la propriété suivante: si $A = \rho^{-1}(X - X_{\text{rég}})$, alors $\tilde{X} - A$ est dense dans $\tilde{X}$ et la restriction de ρ est un isomorphisme de $\tilde{X} - A$ sur $X_{\text{rég}}$. (Le terme n'a donc pas ici le même sens qu'à la section I.3, où il s'agissait d'une « situation relative » où un ensemble analytique (= courbe) étant plongé dans une variété (= plan).) Lorsque $X - X_{\text{rég}}$ est réduit à un point x_0, on appelle *fibre exceptionnelle* de la résolution le sous-ensemble analytique $\rho^{-1}(x_0)$ de $\tilde{X}$.

Exemple 1. Soit $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$, qui est une surface lisse en dehors de l'origine; le changement de variables $\xi = ix + y$, $\eta = ix - y$ montre que X est isomorphe à $A_{2,1}$. L'image Q de ses points réguliers par la projection canonique $h: \mathbf{C}^3 - \{0\} \to P^2$ est une courbe projective lisse $\{[x, y, z] \in P^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$. On en précise la nature grâce à l'application homogène

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3 \\ (s, t) \mapsto \left(\frac{i}{2}(s^2 + t^2), \frac{1}{2}(s^2 - t^2), st\right) \end{cases};$$

elle factorise en un morphisme $\varphi: P^1 \to Q$ qui est bijectif et qui est donc un isomorphisme.

Considérons $S = \{([z], w) \in P^2 \times \mathbf{C}^3 \mid w \in h^{-1}([z]) \cup \{0\}\}$ et la restriction $\pi: S \to \mathbf{C}^3$ de la seconde projection. On montre comme en I.3 que S est une variété lisse, qui est incidemment l'espace total du fibré canonique sur P^2. Le morphisme π est propre, induit un isomorphisme de $S - \pi^{-1}(0)$ sur $\mathbf{C}^3 - \{0\}$, et sa « fibre exceptionnelle » est $\pi^{-1}(0) = P^2$; c'est par définition l'*éclatement de* $\mathbf{C}^3$ *à l'origine.*

---

[1]) On dit parfois « désingularisation » au lieu de « résolution ».

Posons $\tilde{X} = \{ ([z], w) \in S \mid [z] \in Q \}$; l'application $\lambda: \tilde{X} \to Q$ définie par $\lambda([z], w) = [z]$ est la restriction à Q du fibré canonique de P^2. Alors l'application $\rho: \tilde{X} \to X$ qui envoie $([z], w)$ sur w est une résolution de X avec fibre exceptionnelle $E = \rho^{-1}(0)$ isomorphe à P^1.

Plus généralement, soit X^d un cône de degré d dans $\mathbf{C}^{k+1}$ ayant une singularité isolée à l'origine, de sorte que $Q^d = h(X^d - \{0\})$ est lisse dans P^k. Soient S l'espace total du fibré canonique sur P^k et $\pi: S \to \mathbf{C}^{k+1}$ l'éclatement de $\mathbf{C}^{k+1}$ à l'origine. Posons $\tilde{X}^d = \{ ([z], w) \in S \mid [z] \in Q^d \}$. Alors la restriction $\rho: \tilde{X}^d \to X^d$ de π est une résolution de X^d avec fibre exceptionnelle isomorphe à Q^d.

Exemple 2. Soit $X = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \}$, qui s'écrit en d'autres coordonnées $\{ (v_1, v_2, w_1, w_2) \in \mathbf{C}^4 \mid v_1 w_2 = v_2 w_1 \}$ et qui est un ensemble de dimension 3 lisse en dehors de l'origine. La sous-variété correspondante Q de P^3 est une surface lisse. L'application

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^4 \\ ((u_1, u_2), (u_3, u_4)) \mapsto (u_1 u_3, u_2 u_4, u_1 u_4, u_2 u_3) \end{cases}$$

factorise en un morphisme bijectif $P^1 \times P^1 \to Q$, donc en un isomorphisme. (La vérification de la bijectivité est un exercice facile. Le fait que les morphismes bijectifs sont des isomorphismes, qui est élémentaire en dimension 1, est pour les dimensions supérieures un théorème non banal: voir par exemple [2], page 179.)

Le procédé décrit à la fin de l'exemple 1 consiste à poser

$$\tilde{X} = \{ ([z], w) \in P^3 \times \mathbf{C}^4 \mid [z] \in Q \quad \text{et} \quad w \in h^{-1}([z]) \cap \{0\} \}$$

et

$$\rho: \begin{cases} \tilde{X} \to X \\ ([z], w) \mapsto w \end{cases}.$$

C'est une résolution avec fibre exceptionnelle de dimension $2 = \dim(X) - 1$ isomorphe à $P^1 \times P^1$.

On peut aussi considérer

$$\tilde{Y} = \{ ([z], v, w) \in P^1 \times \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2 \mid v \text{ et } w \text{ dans } h^{-1}([z]) \cup \{0\} \}$$

qui est l'espace total de la somme de Whitney de deux fibrés canoniques

sur P^1. Alors $\sigma : \begin{cases} \tilde{Y} \to X \\ ([z], v, w) \mapsto (v, w) \end{cases}$ est aussi une résolution de X avec fibre exceptionnelle de dimension 1.

Cet exemple montre en particulier que la fibre exceptionnelle d'une résolution $\rho : \tilde{X} \to X$ avec X à point singulier unique x_0 ne dépend pas seulement du germe de X en x_0, mais aussi fortement de ρ. Toutefois, lorsqu'on se restreint à des espaces X de dimension *deux*, on peut lever cette ambiguïté: il existe en effet dans ce cas une unique « résolution minimale » pour tout germe de surface avec singularité isolée, et la fibre exceptionnelle d'une telle résolution en un point singulier ne dépend que du germe de la singularité; voir [13], chapitre V.

Rappelons qu'un *diviseur* D dans une variété lisse M (ci-dessous toujours connexe) est une famille $(D_\beta, n_\beta)_{\beta \in B}$ où les D_β sont des sous-ensembles analytiques fermés de codimension un dans M, où les n_β sont des entiers rationnels, et où la famille $\{ \beta \in B \mid D_\beta \cap K \neq \phi \}$ est finie pour tout compact K de M. On écrit aussi $D = \sum_{\beta \in B} n_\beta D_\beta$, et nous noterons $| D |$ le *support* de D, c'est-à-dire le sous-espace topologique de M qui est réunion des ensembles D_β pour lesquels $n_\beta \neq 0$.

Soit $f : M \to \mathbf{C}$ une fonction méromorphe non nulle. Soient Z_f [resp. P_f] l'ensemble des zéros [resp. des pôles] de f ; on sait que ce sont des sous-ensembles de codimension 1 dans M (ou l'ensemble vide); voir [8], VIII.B.4. Soit $(Z_{f,i})_{i \in I}$ l'ensemble des composantes connexes des points réguliers de Z_f. Pour chaque $i \in I$, soient D_i l'adhérence de $Z_{f,i}$ dans M et n_i l'ordre du zéro de f en un point de $Z_{f,i}$ (qui est indépendant du choix de ce point); on sait que $\{ i \in I \mid | D_i | \cap K \neq \phi \}$ est fini pour tout compact K de M. On définit de même $(P_{f,j})_{j \in J}$ puis, pour chaque $j \in J$, l'ensemble irréductible D_j et l'ordre n_j du pôle de f en un point de $P_{f,j}$. On appelle *diviseur de la fonction* f et on note D_f le diviseur $\sum n_i D_i - \sum n_j D_j$.

Les diviseurs de M forment pour l'addition naturelle un *groupe abélien* $\mathrm{Div}(M)$, et ceux à supports compacts un sous-groupe $\mathrm{Div}_c(M)$.

Si M est de *dimension deux*, on définit une *forme d'intersection*

$$\begin{cases} \mathrm{Div}(M) \times \mathrm{Div}_c(M) \to Z \\ (D, E) \mapsto \langle D \mid E \rangle \end{cases}$$

dont l'existence repose sur la dualité de Poincaré et dont nous utiliserons les propriétés suivantes:

(j) $\langle \mid \rangle$ est *bilinéaire*;

(jj) la restriction de $\langle \mid \rangle$ à $\mathrm{Div}_c(M) \times \mathrm{Div}_c(M)$ est *symétrique*;

(jjj) si D_1 et D_2 sont des courbes irréductibles lisses à *intersections transverses*, $\langle D_1 \mid D_2 \rangle$ est le cardinal de $|D_1| \cap |D_2|$;

(jv) si $f : M \dashrightarrow \mathbf{C}$ est une *fonction méromorphe*, $\langle D_f \mid E \rangle = 0$ pour tout $E \in \mathrm{Div}_c(M)$;

(v) si D est irréductible à support compact, $\langle D \mid D \rangle$ est l'évaluation de la *classe de Chern* du diviseur D sur la classe fondamentale $[D]$.

(vj) Soient M' une variété lisse, U [respectivement U'] un ouvert de M [resp. de M'], et $\phi : U \to U'$ un *isomorphisme*. Si $D \in \mathrm{Div}(M)$ et $E \in \mathrm{Div}_c(M)$ ont leurs supports dans U, alors $\langle \phi(D) \mid \phi(E) \rangle = \langle D \mid E \rangle$.

Voir par exemple le § 9 de [11].

Soit $\rho : \tilde{X} \to X$ une résolution d'un ensemble X de dimension deux avec une unique singularité en x_0; supposons que la fibre exceptionnelle soit connexe et que ses composantes irréductibles soient des courbes lisses sans point triple et à intersections transverses. (Les exemples ci-dessous montrent l'intérêt de cette situation aussi bien que les résultats généraux; voir pour ceux-ci [13], théorème 5.12.) On associe à ρ sa *matrice d'intersection* $(e_{i,j})$: si $E_1, \ldots, E_n$ sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $E = \rho^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$ (qui sont en nombre fini car ρ est propre), alors $e_{i,j} = \langle E_i \mid E_j \rangle$. Cette matrice est bien définie à conjuguaison près par une matrice de permutation.

Dans l'exemple 1 ci-dessus, cette matrice est réduite au nombre -2; donnons-en deux raisons.

La fibre exceptionnelle $E \approx P^1$ est irréductible; c'est la section nulle du fibré en droites $\lambda : \tilde{X} \to Q$. Or l'isomorphisme $\varphi : P^1 \to Q$ est défini par l'application $\tilde{\varphi} : \mathbf{C}^2_{st} \to \mathbf{C}^3_{xyz}$, et celle-ci s'écrit aussi (avec $u = is$, $v = -it$, $\xi = ix+y$ et $\eta = ix-y$):

$$\begin{cases} \mathbf{C}^2_{uv} \to \mathbf{C}^3_{\xi\eta z} \\ (u, v) \mapsto (v^2, u^2, uv) \end{cases}$$

Par suite, l'image inverse par φ du fibré λ sur Q est le fibré noté $\lambda_{(-2)}$ à la section I.3; il résulte de la propriété (v) ci-dessus que $\langle E \mid E \rangle = -2$.

Soient d'autre part $S_{(-2)}$ comme en I.3 et $f : S_{(-2)} \to \mathbf{C}$ le composé de $\pi_{(-2)} : S_{(-2)} \to \mathbf{C}^3$ et de la première projection $x : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$. Soit A la

transformée stricte de l'axe d'équation $x = y = 0$ dans $\mathbf{C}^3$. Alors $D_f = 2A + E$, d'où par (jv) ci-dessus

$$\langle D_f \mid E \rangle = 2\langle A \mid E \rangle + \langle E \mid E \rangle = 0$$

et par (jjj) $\langle E \mid E \rangle = -2$.

Exemple 3. Soit $S_{(-k)}$ comme à la section I.3, avec deux cartes — disons deux copies R_0 et R_1 de $\mathbf{C}^2$ — recollées selon l'isomorphisme que nous écrirons ici

$$\begin{cases} \{(u,v) \in R_0 \mid u \neq 0\} \to \{(u,v) \in R_1 \mid v \neq 0\} \\ (u,v) \mapsto (u^k v, 1/u) \end{cases}.$$

Considérons d'une part les fonctions $\xi_0, \eta_0, \zeta_0 \colon R_0 \to \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_0(u,v) = u^k v \qquad \eta_0(u,v) = v \qquad \zeta_0(u,v) = uv$$

et d'autre part les fonctions $\xi_1, \eta_1, \zeta_1 \colon R_1 \to \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_1(u,v) = u \qquad \eta_1(u,v) = uv^k \qquad \zeta_1(u,v) = uv^{k-1}.$$

On vérifie sans peine que ces données définissent trois fonctions globales $\xi, \eta, \zeta \colon S_{(-k)} \to \mathbf{C}$ satisfaisant l'égalité $\zeta^k = \xi\eta^{k-1}$, donc aussi une application $\rho \colon S_{(-k)} \to A_{k,1}$. Le lecteur s'assurera à titre d'exercice que ρ est une résolution de $A_{k,1}$, que la matrice d'intersection se réduit au nombre $-k$, et que ρ se relève en $\tilde{\rho} \colon S_{(-k)} \to X_{k,1}$. L'application $\tilde{\rho}$ résout donc la singularité définie par le groupe cyclique

$$\left\{ \begin{pmatrix} e(j/k) & 0 \\ 0 & e(j/k) \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2) \;\middle|\; j = 0, \ldots, k-1 \right\}.$$

Si $k = 2$, on retrouve l'exemple 1.

Citons enfin sans démonstration le théorème suivant: pour toute singularité isolée de dimension deux et pour toute désingularisation (minimale ou non), la matrice d'intersection associée est négative définie. Les exemples ci-dessus offrent une première illustration de ce résultat. Voir [16], § 1.

IV.2. Trois suites numériques définies par n et q

Le contenu des paragraphes 2 et 3 se trouve dans [9].

Soient n et q des entiers avec $0 < q < n$.

Posons $\lambda_0 = n$ et $\lambda_1 = q$. Définissons ensuite les entiers $\lambda_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ par l'algorithme euclidien suivant: