Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: IV.2. Trois suites numériques définies par n et q
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

transformée stricte de l'axe d'équation $x = y = 0$ dans $\mathbf{C}^3$. Alors $D_f = 2A + E$, d'où par (jv) ci-dessus

$$\langle D_f \mid E \rangle = 2\langle A \mid E \rangle + \langle E \mid E \rangle = 0$$

et par (jjj) $\langle E \mid E \rangle = -2$.

Exemple 3. Soit $S_{(-k)}$ comme à la section I.3, avec deux cartes — disons deux copies R_0 et R_1 de $\mathbf{C}^2$ — recollées selon l'isomorphisme que nous écrirons ici

$$\begin{cases} \{(u,v) \in R_0 \mid u \neq 0\} \to \{(u,v) \in R_1 \mid v \neq 0\} \\ (u,v) \mapsto (u^k v, 1/u) \end{cases}.$$

Considérons d'une part les fonctions $\xi_0, \eta_0, \zeta_0 \colon R_0 \to \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_0(u,v) = u^k v \qquad \eta_0(u,v) = v \qquad \zeta_0(u,v) = uv$$

et d'autre part les fonctions $\xi_1, \eta_1, \zeta_1 \colon R_1 \to \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_1(u,v) = u \qquad \eta_1(u,v) = uv^k \qquad \zeta_1(u,v) = uv^{k-1}.$$

On vérifie sans peine que ces données définissent trois fonctions globales $\xi, \eta, \zeta \colon S_{(-k)} \to \mathbf{C}$ satisfaisant l'égalité $\zeta^k = \xi\eta^{k-1}$, donc aussi une application $\rho \colon S_{(-k)} \to A_{k,1}$. Le lecteur s'assurera à titre d'exercice que ρ est une résolution de $A_{k,1}$, que la matrice d'intersection se réduit au nombre $-k$, et que ρ se relève en $\tilde{\rho} \colon S_{(-k)} \to X_{k,1}$. L'application $\tilde{\rho}$ résout donc la singularité définie par le groupe cyclique

$$\left\{ \begin{pmatrix} e(j/k) & 0 \\ 0 & e(j/k) \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^2) \;\middle|\; j = 0, \ldots, k-1 \right\}.$$

Si $k = 2$, on retrouve l'exemple 1.

Citons enfin sans démonstration le théorème suivant: pour toute singularité isolée de dimension deux et pour toute désingularisation (minimale ou non), la matrice d'intersection associée est négative définie. Les exemples ci-dessus offrent une première illustration de ce résultat. Voir [16], § 1.

IV.2. Trois suites numériques définies par n et q

Le contenu des paragraphes 2 et 3 se trouve dans [9].

Soient n et q des entiers avec $0 < q < n$.

Posons $\lambda_0 = n$ et $\lambda_1 = q$. Définissons ensuite les entiers $\lambda_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ par l'algorithme euclidien suivant:

$$\lambda_2 = b_1\lambda_1 - \lambda_0 \quad \text{avec} \quad b_1 \geqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda_2 < \lambda_1$$
$$\lambda_3 = b_2\lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{avec} \quad b_2 \geqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda_3 < \lambda_2$$

Soit s le plus grand entier pour lequel λ_s soit non nul, de sorte que

$$\lambda_s = b_{s-1}\,\lambda_{s-1} - \lambda_{s-2} \quad \text{avec} \quad b_{s-1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_s < \lambda_{s-1}$$
$$0 = b_s\,\lambda_s - \lambda_{s-1}\,.$$

On vérifie sans peine que λ_s est le plus grand commun diviseur de n et q, ce qui s'écrit $\lambda_s = (n, q)$. On définit $\lambda_{s+1} = 0$. On peut remarquer que les équations ci-dessus s'écrivent aussi

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{\lambda_2}{q}\,, \quad \frac{q}{\lambda_2} = b_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,, \ldots,$$
$$\frac{\lambda_{s-2}}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{1}{b_s}\,.$$

D'où

$$\frac{n}{q} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_s}}}$$

ce que certains auteurs notent plus économiquement

$$\frac{n}{q} = b_1 - \underline{1}/\overline{b_2} - \ldots - \underline{1}/\overline{b_s}\,.$$

On définit ensuite les suites $(\mu_k)_{k=0,\ldots,s+1}$ et $(\nu_k)_{k=0,\ldots,s+1}$ par

$$\begin{array}{ll}
\mu_0 = 0 & \nu_0 = 1 \\
\mu_1 = 1 & \nu_1 = 1 \\
\mu_2 = b_1\,\mu_1 - \mu_0 & \nu_2 = b_1\,\nu_1 - \nu_0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_s = b_{s-1}\,\mu_{s-1} - \mu_{s-2} & \nu_s = b_{s-1}\,\nu_{s-1} - \nu_{s-2} \\
\mu_{s+1} = b_s\,\mu_s - \mu_{s-1} & \nu_{s+1} = b_s\,\nu_s - \nu_{s-1}
\end{array}$$

Lemme. Pour tout $k \in \{0, 1, ..., s\}$ on a:

$$\text{(a)} \quad \lambda_k + (n-q)\mu_k = nv_k$$
$$\text{(b)} \quad \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1}\mu_k = n$$
$$\text{(c)} \quad \mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} = 1 .$$

De plus

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_{s+1} = \frac{n}{(n,q)}$$

et

$$1 = v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_{s+1} = \frac{n-q}{(n,q)} .$$

Preuve. Les relations (a), (b) et (c) sont banales si $k = 0$ et si $k = 1$. Pour $k \geqslant 2$, elles résultent des calculs élémentaires suivants:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} + (n-q)\mu_{k+1} &= b_k \lambda_k - \lambda_{k-1} + (n-q)(b_k\mu_k - \mu_{k-1}) \\ &= b_k(\lambda_k + (n-q)\mu_k) - (\lambda_{k-1} + (n-q)\mu_{k-1}) = b_k n v_k - n v_{k-1} \\ &= n v_{k+1} \qquad (k=1, \ldots, s) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}\mu_{k+2} - \lambda_{k+2}\mu_{k+1} &= \lambda_{k+1}(b_{k+1}\mu_{k+1} - \mu_k) - (b_{k+1}\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mu_{k+1} \\ &= \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1}\mu_k \quad (k=1, \ldots, s-1) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{k+2} v_{k+1} - \mu_{k+1} v_{k+2} &= (b_{k+1}\mu_{k+1} - \mu_k) v_{k+1} - \mu_{k+1}(b_{k+1} v_{k+1} - v_k) \\ &= \mu_{k+1} v_k - \mu_k v_{k+1} \qquad (k=1, \ldots, s-1) . \end{aligned}$$

En particulier, comme $\lambda_{s+1} = 0$, on a $0 + (n-q)\mu_{s+1} = nv_{s+1}$ et $\lambda_s \mu_{s+1} = n$, d'où $\mu_{s+1} = \dfrac{n}{\lambda_s} = \dfrac{n}{(n,q)}$ et $v_{s+1} = \dfrac{n-q}{(n,q)}$. Enfin, comme $b_k \geqslant 2$ pour $k = 1, ..., s$, on a

$$\mu_{k+1} - \mu_k = (b_k - 1)\mu_k - \mu_{k-1} \geqslant \mu_k - \mu_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant \mu_1 - \mu_0 > 0$$

et

$$v_{k+1} - v_k \geqslant \ldots \geqslant v_1 - v_0 \geqslant 0 .$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous reviendrons à plusieurs reprises sur les exemples décrits dans le tableau suivant:

n	10	8	6	4
q	8	6	4	2
s	4	3	2	1
$(\lambda_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(10,8,6,4,2,0)	(8,6,4,2,0)	(6,4,2,0)	(4,2,0)
$(\mu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(0,1,2,3,4,5)	(0,1,2,3,4)	(0,1,2,3)	(0,1,2)
$(\nu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1)

IV.3. Les résolutions $\rho : M_{n,q} \to A_{n,q}$ ou $\tilde{\rho} : M_{n,q} \to X_{n,q}$

Soient à nouveau n et q comme à la section 2, dont on reprend toutes les notations.

Pour chaque $k \in \{ 0, 1, ..., s \}$, désignons par R_k une copie de C^2, par (u_k, v_k) ses coordonnées canoniques, et par R'_k [resp. R''_k] l'ouvert de ses points de première [resp. seconde] coordonnée non nulle. Pour $k \in \{ 1, ..., s \}$, soit

$$\varphi_{k-1} : \begin{cases} R'_{k-1} & \to & R''_k \\ (u_{k-1}, v_{k-1}) & \mapsto & ((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1}, \ (u_{k-1})^{-1}) \end{cases} ;$$

c'est un isomorphisme dont l'inverse applique (u_k, v_k) sur $(1/v_k, v_k^{b_k} u_k)$. Notons $R_{0,1}$ la variété obtenue en recollant R_0 et R_1 selon φ_0, déjà considérée à l'exemple 3 de la section 1. Soient ensuite $R_{0,1,2}$ la variété obte ue en recollant $R_{0,1}$ et R_2 selon φ_1, ..., et $R_{0,1,...,s} = M_{n,q}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1,...,s-1}$ et R_s selon φ_{s-1}. Nous identifierons chaque R_k à son image dans $M_{n,q}$. La variété $M_{n,q}$ est une *surface lisse* dans laquelle chaque R_k est un ouvert dense (de fait un ouvert de Zariski).

Pour chaque $k \in \{ 1, ..., s \}$, considérons la *courbe*

$$\sigma_k = \{ (u_{k-1}, v_{k-1}) \in R_{k-1} \mid v_{k-1} = 0 \} \cup \{ (u_k, v_k) \in R_k \mid u_k = 0 \}$$

qui est lisse et isomorphe à P^1. Notons encore σ_{in} et σ_{fi} les courbes lisses non compactes définies respectivement par $\{ (u_0, v_0) \in R_0 \mid u_0 = 0 \}$