IV.4. Relation avec les éclatements

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Le schéma de Dynkin, qui a un sommet muni de l'entier $b_k = -\langle \sigma_k \mid \sigma_k \rangle$ pour chaque composante irréductible σ_k de la fibre exceptionnelle, et une arête liant les sommets définis par σ_j et σ_k si $\langle \sigma_j \mid \sigma_k \rangle \neq 0$, est

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_s \\ \bullet & — & \bullet & — & \bullet & — \ \dots \ — & \bullet \end{array} \qquad (\bullet = P^1)$$

Si $q = n - 1$, la matrice $\langle \sigma_j \mid \sigma_k \rangle_{1 \leq j,k \leq s}$ est la matrice de Cartan A_{n-1}.

Preuve. L'existence de $\tilde{\rho}$ résulte de la proposition 8; les autres affirmations de ce qui précède. ■

IV.4. Relation avec les éclatements

Soit $\pi : S \to \mathbf{C}^2$ l'éclatement de $\mathbf{C}^2$ à l'origine, comme en I.3. Considérons ici $T = \mathbf{C} \times S$ et $\tau : T \to \mathbf{C}^3$ l'application id $\times\, \pi$ qui est l'*éclatement de* C^3 *le long de la droite* d'équations $y = z = 0$. On munit T comme en I.3 d'un atlas à deux cartes $\psi_j : T_j \to \mathbf{C}^3$ $(j = 0, 1)$, avec les changements de cartes donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} = \psi_0(T_0 \cap T_1) \to \psi_1(T_0 \cap T_1) = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ (x, y, z) \mapsto (x, 1/y, yz) \end{cases}$$

et par l'isomorphisme inverse. L'application τ s'écrit dans les cartes

$$\tau_0 : \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_0(T_0) \to \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, z, yz) \end{cases}$$

et

$$\tau_1 : \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_1(T_1) \to \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, yz, z) \end{cases}$$

La transformée stricte de $A_{n,q} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q} \}$ apparaît dans une carte comme la surface lisse

$$\{ (x, y, z) \in \psi_0(T_0) \mid y^n z^q = x \}$$

et dans l'autre comme

$$\{ (x, y, z) \in \psi_1(T_1) \mid z^q = xy^{n-q} \} \approx A_{q,2q-n}\,.$$

Au niveau des normalisés, l'éclatement permet donc de « remplacer » $X_{n,q}$ par $X_{q,\lambda}$ avec $0 < \lambda < q$ et $\lambda = (2+r)\,q - n$ pour un entier positif

convenable r (nous avons utilisé ici les remarques qui précèdent la proposition 13). Avec les notations de la section 2, on a précisément $\lambda = \lambda_2$ et $2 + r = b_1$.

En cherchant à itérer l'argument jusqu'à trouver une surface lisse, on aurait précisément à considérer les suites numériques de la section 2.

V. L'ICOSAÈDRE ET LES SOUS-GROUPES FINIS NON CYCLIQUES DE $SU(2)$

V.1. Le cas de l'icosaedre

Soient $h: \mathbf{C}^2 - \{0\} \to P^1 = \mathbf{S}^2$ la projection canonique et $\delta: SU(2) \to SO(3)$ le revêtement universel (à deux feuillets) du groupe des automorphismes analytiques isométriques de P^1 (= du groupe des rotations de la sphère). Soient $\underline{G}$ le sous-groupe de $SO(3)$ des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier inscrit dans $\mathbf{S}^2$, et $G = \delta^{-1}(\underline{G})$; nous noterons encore δ la projection canonique de G sur $\underline{G}$. Le groupe $\underline{G}$ a 60 éléments; ses orbites sur $\mathbf{S}^2$ ont aussi 60 points à trois exceptions près qui sont

l'orbite $\underline{\mathscr{A}} = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{12}\}$ des sommets de l'icosaèdre
l'orbite $\underline{\mathscr{B}} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{20}\}$ des barycentres de ses faces
l'orbite $\underline{\mathscr{C}} = \{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{30}\}$ des milieux de ses arêtes.

Le groupe G agit linéairement dans $\mathbf{C}^2$; ses orbites ont toutes 120 points, à la seule exception de l'origine.

Le quotient $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G$ est un ensemble analytique, normal par le théorème de Cartan; il a un unique point non lisse, que nous noterons x_0 et qui est l'image canonique de l'origine de $\mathbf{C}^2$. Nous renvoyons à [12], chapitre II, § 13 et/ou à [15], théorème 4.5 pour le résultat classique suivant (dont nous ne faisons pas usage ci-dessous): il existe une application polynômiale $\tilde{\phi}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ qui fournit par passage au quotient un isomorphisme ϕ de X_{ico} sur la surface de $\mathbf{C}^3$ à singularité unique

$$A_{ico} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3\}.$$