3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\multicolumn{4}{c|}{m \text{ colonnes}} & \multicolumn{3}{c}{n \text{ colonnes}} \\
a_n & & & & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
 & & & a_n & & & \\
\hline
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_0 & \vdots & & & \Phi(f^{n-1}\bar{g}) & \cdots & \Phi(\bar{g}) \\
 & a_0 & & & & & \\
 & & & a_0 & \vdots & & \vdots
\end{array}\right]
$$

Dans la matrice précédente, $\Phi(f^j\bar{g})$ désigne un vecteur colonne dans la base $(e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0)$.

Comme $|a_n| = 1$, le groupe ainsi présenté est isomorphe à $\mathcal{M}/\mathcal{N}$.

Le déterminant de cette dernière matrice est égal, en valeur absolue, d'une part à l'ordre du groupe $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ et d'autre part, par construction, à Rés (f, g). C.q.f.d.

3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

Soit K un nœud apprivoisé dans S^3. Désignons par X le complémentaire du nœud $S^3 - K$, par X_∞ le revêtement cyclique infini de X, par X_m le revêtement cyclique à m feuilles de X, par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur K.

Considérons K et S^3 comme orientés. Alors, via des conventions fixées une fois pour toutes, on obtient un générateur t du groupe de Galois du revêtement $X_\infty \to X$.

Les « groupes » d'homologie $H_1(X_\infty, R)$, $H_1(\hat{X}_m, R)$ et $H_1(X_m, R)$ sont alors munis d'une structure de RT-modules, t agissant via Galois.

Les faits suivants sont bien connus. Pour une démonstration, voir [4].

(i) $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}T$-module de type fini. (C'est essentiellement une conséquence du fait que $\mathbf{Z}T$ est nœthérien.)

(ii) $H_1(\hat{X}_m; R) \approx \operatorname{Coker}\{1 - t^m : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty, R)\}$.
(C'est une conséquence de la « suite exacte de Milnor »).
Si l'on fait $m = 1$ dans la dernière égalité et si l'on utilise le fait que RT est nœthérien, on obtient que $1 - t : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty; R)$ est un isomorphisme pour tout R nœthérien.

(iii) $H_1(X_\infty, \mathbf{Q})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$.
(Conséquence facile du dernier argument par $R = \mathbf{Q}$.)
Le résultat suivant est dû à R. H. Crowell [1].

(iv) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module admettant une présentation carrée (c'est-à-dire: nombre de générateurs égal au nombre de relations). Soit $\Delta \in \mathbf{Z}T$ le déterminant de cette présentation. (Δ est le générateur du premier idéal élémentaire de A.) Alors A est sans $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si Δ est « primitif » (c'est-à-dire si ses coefficients sont premiers entre eux).
Il est classique que $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ satisfait les hypothèses du théorème de Crowell.
Le dernier fait dont nous aurons besoin est dû à M. Kervaire [5]:

(v) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini et tel que la multiplication par $(1-t)$ soit un isomorphisme, alors le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion de A est fini.

4. La formule de R. H. Fox

Conformément à nos conventions du paragraphe précédent, désignons par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur nœud de polynôme d'Alexander Δ. *La formule de Fox* s'énonce ainsi:

$H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est fini si et seulement si $\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$. En ce cas l'ordre du groupe $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est égal à $|\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta)|$.