5. Exemples et commentaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Exemples et commentaires

A. La première mention du fait que $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas nécessairement somme directe de $\mathbf{Z}T$-modules cycliques se trouve (à ma connaissance) dans une note de l'article de J. Milnor [6]. Voici une façon très simple de construire de tels nœuds.

Affirmation : Soit $K \subset S^3$ un nœud dont le polynôme d'Alexander est irréductible (sur $\mathbf{Q}$) et pour lequel $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ n'est pas un groupe cyclique. Alors $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas somme de modules cycliques.

En effet, l'irréductibilité du polynôme d'Alexander entraîne que, si $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ était somme de modules cycliques, il serait en fait cyclique. Comme une présentation du groupe $H_1(\hat{X}_2; \mathbf{Z})$ est obtenue en remplaçant t par -1 dans une présentation du module $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ (appliquer le § 3, (ii), pour $m = 2$ et le fait que $(1-t)$ est un isomorphisme), on déduirait que $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ serait cyclique. Contradiction.

Bien sûr, l'argument est susceptible de multiples généralisations. Mais il a l'avantage de permettre l'usage des tables! C'est ainsi qu'on découvre que le nœud 9_{35} satisfait les conditions de l'affirmation (cf. livre de Reidemeister).

En fait, il est facile de voir que 9_{35} est le nœud de pretzel (3, 3, 3). En appliquant la méthode classique pour obtenir une matrice de Seifert des nœuds de pretzel (cf., par exemple, H. Trotter [9]) on obtient la matrice de présentation suivante pour le module $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 3(1-t) & 2t-1 \\ t-2 & 3(1-t) \end{pmatrix} .$$

D'où le polynôme d'Alexander $\Delta = 7t^2 - 13t + 7$ (irréductible sur R) et $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/_3 \oplus \mathbf{Z}/_9$.

Naturellement, on peut construire d'autres nœuds de pretzel sur le même principe.

B. L'argument basé sur la suite Ker-Coker (et a fortiori la formule de Fox) montrent que le choix de la décomposition en somme de modules cycliques sur $\mathbf{Q}T$ n'intervient pas pour calculer l'ordre de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsqu'il est fini.

Il est bien connu que, en revanche, le groupe lui-même dépend de la décomposition. L'exemple classique consiste en les nœuds 6_1 et 9_{46} (et $m=2$).

C. Il faut prendre garde au fait que la formule de Fox ne donne pas l'ordre de la $\mathbf{Z}$-torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsque ce groupe n'est pas fini, contrairement à ce que la formulation utilisée par L. P. Neuwirth [7] laisse croire. En fait, comme nous l'avons vu, Rés $(1-t^m, \Delta)$ est nul dans le cas où $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ n'est pas fini.

L'exemple suivant montre que la détermination de l'ordre de la torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$, lorsque ce groupe n'est pas fini est une question plus difficile.

Soient $P(t) = 1 - t + t^2$, $Q(t) = 6t^2 - 11t + 6$, $A_1 = \mathbf{Z}T \big/ P(t) \oplus \mathbf{Z}T \big/ Q(t)$

$$A_2 = \mathbf{Z}T \big/ P(t) \,.\, Q(t)\,.$$

D'après les résultats classiques de H. Seifert, A_1 et A_2 peuvent être réalisés comme $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ de nœuds dans S^3.

Il n'est pas très difficile de voir que

$$A_1 \big/ (1-t)^6 A_1 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \text{ un 5-groupe de rang 2,}$$

$$A_2 \big/ (1-t^6)\, A_2 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,.$$

La raison essentielle de ces comportements est que $P(t) = Q(t)$ sur le corps F_5.

Cet exemple montre, en particulier, que cette fois-ci, le choix de la décomposition sur QT n'est pas innocent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Crowell, R. H. The group G'/G'' of a knot group G. *Duke Math. Jour. 30* (1963), pp. 349-354.

[2] Fox, R. H. Free differential calculus. III Subgroups. *Annals of Math. 59* (1954), pp. 196-210.

[3] —— A quick trip through knot theory. *Topology of 3-manifolds (ed. M. K. Fort Jr.)*. Prentice Hall (1962), pp. 120-167.