Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES
Autor: Jeanquartier, Pierre
Kapitel: 3. Théorèmes du type de Paley-Wiener
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50384

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$(-1)^m c^{-1}\, \theta_{z_1,n_1} * \ldots * \theta_{z_k,n_k},$$

où $\theta_{w,n} = (-1)^{n-1}\, t^w (\log t)^{n-1}\, \theta/(n-1)!$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction $z \mapsto (z+w)^{-n}$.

3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

Théorème 3.1. *Soit* $F \in \mathscr{H}_+$.

1) *F est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans* $[a^{-1}, a]$ $(a \geqslant 1)$ *si et seulement si F est entière et vérifie une inégalité*

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^m a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{3.1}$$

avec $m \in \mathbf{N}$ *et* $C > 0$.

2) *F est la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ à support dans* $[a^{-1}, a]$ $(a>1)$ *si et seulement si F est entière et, pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *il existe* $C_m > 0$ *tel que*

$$|F(z)| \leqslant C_m (1+|z|)^{-m} a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{3.2}$$

Démonstration. (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit T une distribution sur $\mathbf{R}$ à support dans $[a^{-1}, a]$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que T soit d'ordre $\leqslant m$ et

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \sum_{j=0}^{m} \sup_t |\varphi^{(j)}(t)| \tag{3.3}$$

pour tout $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$, avec $M > 0$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ égale à 1 au voisinage de $[a^{-1}, a]$. On a $F(z) = \langle T, t^{z-1}\chi \rangle$ et F est entière. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ nulle pour $t \geqslant 3$ et égale à 1 pour $t \leqslant 2$. Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t)\, \psi(t^{|z|}\, a^{-|z|})\, \psi(t^{-|z|}\, a^{-|z|})\, t^{z-1}.$$

On a $\varphi_z \in C^\infty(\mathbf{R})$, et comme $\varphi_z(t) = t^{z-1}$ au voisinage du support de T, $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$. D'après (3.3), en majorant les dérivées de φ_z, on obtient (3.1).

Soit F entière vérifiant (3.1). On a $F = \mathfrak{M}T$ avec $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_\pm$, où

$$g_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z) z^{-(m+2)} dz,$$

$\gamma(s)$ étant la droite $\operatorname{Re} z = s$ orientée dans le sens $\operatorname{Im} z$ croissant, avec $\pm s > 0$; cela résulte de la définition de $\mathfrak{N}$ si $s > 0$, et provient du fait que $g_+ - g_-$ est un polynôme en $\log t$ de degré $\leqslant m + 1$ si $s < 0$. L'inégalité (3.1) entraîne

$$|g_{\pm}(t)| \leqslant A a^{|s|} t^{-s}$$

lorsque $|s| > 1$, A constante > 0. En faisant tendre s vers $+\infty$ ou $-\infty$ on obtient $g_+(t) = 0$ pour $t > a$ et $g_-(t) = 0$ pour $t < a^{-1}$, de sorte que le support de T est contenu dans $[a^{-1}, a]$.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support dans $[a^{-1}, a]$. Il est clair que $F = \mathfrak{M}\varphi$ est une fonction entière et que, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$|z^k F(z)| = \left| \int_{a^{-1}}^{a} D^k \varphi(t)\, t^{z-1}\, dt \right| \leqslant A_k a^{|\operatorname{Re} z|},$$

A_k constante positive, d'où l'inégalité (3.2).

Inversement, si F entière vérifie (3.2) pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $F = \mathfrak{M}\varphi$, où $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, dz$ est une fonction C^∞, à support dans $[a^{-1}, a]$ d'après 1), c.q.f.d.

Espaces $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$. Dans la suite, nous désignerons par $\mathscr{E}$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}_+, t^{-1}\, dt)$ formé des fonctions à support borné, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathscr{E}} = \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^2 t^{-1}\, dt \right)^{1/2}, \qquad f \in \mathscr{E}.$$

Il est clair que $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'_+ \cap L^1(\mathbf{R}_+) \cap L^2(\mathbf{R}_+)$.

Par exemple, si f est une fonction de carré intégrable à support borné telle que $|f(t) - f(0)| \leqslant C t^{\alpha}$ lorsque $t \to +0$, avec C et $\alpha > 0$, on a $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $f(0) = 0$.

Le théorème suivant caractérise l'espace $\mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$:

Théorème 3.2. *Pour qu'une fonction F soit la transformée de Mellin d'une fonction $f \in \mathscr{E}$ à support dans $]0, a]$ $(a > 0)$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1) F *est holomorphe dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z > 0$,

2) *la fonction* $F_x : y \mapsto F(x+iy)$ *appartient à* $L^2(R)$ *pour tout* $x > 0$ *et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant C a^x, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Si les conditions précédentes sont vérifiées, F_x *tend vers une limite* F_0 *dans* $L^2(R)$ *lorsque* $x \to +0$ *et*

$$\| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} = \sqrt{2\pi} \| t^x f \|_{\mathscr{E}} \quad \text{pour tout } x \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Démonstration. (Voir aussi [6], théorème 5, page 8). Soit $f \in \mathscr{E}$ à support contenu dans $]0, a]$, $a > 0$. Pour $x = \operatorname{Re} z > 0$, $y = \operatorname{Im} z$, on a $F(z) = \mathfrak{M} f(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{z-1}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(s)\, e^{iys}\, ds$, avec $g_x(s) = f(e^s)\, e^{sx} = g_0(s)\, e^{sx}$, $g_0 \in L^2(\mathbf{R})$, g_0 nulle au voisinage de $+\infty$, $\| g_x \|_{L^2(\mathbf{R})} = \| t^x f \|_{\mathscr{E}}$, $x \geqslant 0$. Autrement dit, la fonction F_x est la transformée de Fourier de $g_x \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ pour $x > 0$, et la formule de Plancherel donne (3.4) pour $x > 0$. Comme $g_x \to g_0$ dans $L^2(\mathbf{R})$ lorsque $x \to +0$, F_x tend vers une limite F_0 dans $L^2(\mathbf{R})$, F_0 étant la transformée de Fourier de g_0; de plus, la formule (3.4) reste valable pour $x = 0$. Enfin 1) et 2) sont vérifiés, l'inégalité de 2) avec $C = \sqrt{2\pi} \| f \|_{\mathscr{E}}$ résultant de (3.4).

Soit F une fonction vérifiant 1) et 2). En vertu du lemme 1.6, pour tout $r > 0$, on a $|F(z)| \leqslant C(r)\, a^{\operatorname{Re} z}$, pour $\operatorname{Re} z > r$, donc $F \in \mathscr{H}_+$. Soit $f = \mathfrak{N} F \in \mathscr{E}'_+$. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$, comme $\mathfrak{N} F$ est limite dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ des fonctions (2.7), on a

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \lim_{A \to \infty} \int_0^\infty dt \int_{-A}^{+A} \varphi(t)\, t^{-x-iy} F_x(y)\, dy.$$

Le théorème de Fubini donne, avec $\Phi = \mathfrak{M}\varphi$,

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \int \Phi_{1-x}(-y) F_x(y)\, dy,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\pi |\langle f, \varphi \rangle| \leqslant \| \Phi_{1-x} \|_{L^2(\mathbf{R})} \| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

Finalement, compte tenu de (3.4) valable quel que soit $x \in \mathbf{R}$ pour f remplacé par $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant M \| t^{1-x} \varphi \|_{\mathscr{E}} a^x$$

avec $M > 0$. En posant $\psi = t^{1/2-x} \varphi$ il vient

$$|\langle t^{x-1/2} f, \psi \rangle| \leqslant M a^x \| \psi \|_{L^2(\mathbf{R}_+)}, \quad x > 0,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$. Le théorème de représentation de Riesz entraîne alors que $t^{x-1/2} f \in L^2(\mathbf{R}_+)$ et que

$$\int_0^\infty (t/a)^{2x} |f(t)|^2 t^{-1} dt \leqslant M^2$$

pour tout $x > 0$. Lorsque $x \to \infty$, cette inégalité implique que le support de f est contenu dans $]0, a]$; si $x \to +0$, elle donne que $f \in \mathscr{E}$, c.q.f.d.

Comme application du théorème précédent, nous allons introduire des espaces qui permettront de classer les éléments de $\mathscr{E}'_+$ en fonction de leur régularité et de leur ordre de grandeur au voisinage de l'origine.

ESPACES $\mathscr{H}^s_r$ ET $\mathscr{E}^s_r$. Etant donné deux nombres réels r et s, nous désignerons par $\mathscr{H}^s_r$ l'ensemble des fonctions $F \in \mathscr{H}_+$ telles que $(z+r+1)^s F(z) = G(z+r)$, avec $G \in \mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$; en particulier $\mathscr{H}^0_0 = \mathscr{H}$. Ainsi, si $F \in \mathscr{H}^s_r$, $F(z)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > -r$ et l'application

$$y \mapsto (x+iy+r+1)^s F(x+iy)$$

est dans $L^2(\mathbf{R})$ pour $x > -r$.

On a $\mathscr{H}^s_r \subset \mathscr{H}^{s'}_{r'}$ si et seulement si $r' \leqslant r$ et $s' \leqslant s$.

Nous poserons $\mathscr{E}^s_r = \mathfrak{N}\mathscr{H}^s_r$ la transformée de Mellin inverse de $\mathscr{H}^s_r$; en particulier $\mathscr{E}^0_0 = \mathscr{E}$.

Dans le cas où s est un entier, on peut caractériser $\mathscr{E}^s_r$ directement:

PROPOSITION 3.3. *Soit m un entier $\geqslant 0$ et soit $T \in \mathscr{E}'_+$.*

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a.1) $T \in \mathscr{E}^m_r$.

(a.2) $t^{-r} D^j T \in \mathscr{E}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

(a.3) $t^{j-r} T^{(j)} \in \mathscr{E}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(b.1) $T \in \mathscr{E}^{-m}_r$.

(b.2) $T = t^r \sum_{j=0}^{m} D^j f_j$ *avec* $f_j \in \mathscr{E}$.

(b.3) $T = \sum_{j=0}^{m} t^{r+j} h_j^{(j)}$ *avec* $h_j \in \mathscr{E}$.

Démonstration. Compte tenu de la formule de Leibniz et de l'égalité $\mathscr{E}_r^s = t^r \mathscr{E}_0^s$, on peut supposer que $r = 0$. Les équivalences de (a.2) et (a.3) ainsi que de (b.2) et (b.3) découlent du lemme 1.1.

Soit $F = \mathfrak{M}T$. On a $T \in \mathscr{E}_0^m \Leftrightarrow (z+1)^m F(z) = G(z)$ avec $G \in \mathscr{H}$ $\Leftrightarrow z^j F \in \mathscr{H}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m \Leftrightarrow D^j T \in \mathscr{E}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

Si $T \in \mathscr{E}_0^{-m}$ on a $F(z) = (z+1)^m G(z)$ avec $G \in \mathscr{H}$. La formule du binôme donne (b.2) avec $f_j = (-1)^j \binom{m}{j} \mathfrak{N}G$.

Si T vérifie (b.2) avec $r = 0$, on a $F(z) = \sum_{j=0}^{m} (-z)^j \mathfrak{M} f_j(z)$ $= (1+z)^m G(z)$ avec $G(z) = \sum_{j=0}^{m} (-z)^j (1+z)^{-m} \mathfrak{M} f_j(z)$ donc $G \in \mathscr{H}$ et $T \in \mathscr{H}_0^{-m}$, c.q.f.d.

L'appartenance à la réunion $\mathscr{E}_{-\infty}^s$ des espaces $\mathscr{E}_r^s$, $r \in \mathbf{R}$, caractérise la régularité d'une distribution. On vérifie en effet que localement, les éléments de $\mathscr{E}_{-\infty}^s$ sont dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R})$ formé des distributions S sur $\mathbf{R}$ telles que $(1+|x|^2)^{s/2} \hat{S}(x)$ soit de carré intégrable, $\hat{S}$ étant la transformée de Fourier de S. Nous démontrerons le résultat suivant:

PROPOSITION 3.4. *Soit* $s > m + 1/2$ *avec* $m \in \mathbf{N}$, *et* $r \in \mathbf{R}$. *Si* $f \in \mathscr{E}_r^s$, *on a* $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et*

$$f^{(j)}(t) = o(t^{r-j}) \quad \textit{lorsque} \quad t \to +0$$

pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

Démonstration. On a $(z+r+1)^s \mathfrak{M} f(z) = G(z+r)$ avec $G \in \mathscr{H}$. Par suite, pour $x > -r$,

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-z-j} z(z+1)\dots(z+j-1) G(z+r)(z+r+1)^{-s} dz$$

fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, donc $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$. Comme $G_x : y \mapsto G(x+iy)$ converge vers G_0 dans $L^2(\mathbf{R})$ lorsque $x \to +0$, on a aussi

$$f^{(j)}(t) = \frac{t^{r-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\log t} \frac{(r-iy)(r-iy-1)\dots(r-iy-j+1)\, G_0(y)}{(1+iy)^s}\, dy$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque $t \to +0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Par conséquent, $f^{(j)}(t) = o(t^{r-j})$ lorsque $t \to +0$, c.q.f.d.

Remarque 1. Si $s < m + 1/2$, $\mathscr{E}_r^s$ n'est pas contenu dans $C^m(\mathbf{R}_+)$. Soit en effet $f \in \mathscr{E}'_+$ tel que $(-D)^m f$ soit la fonction égale à 1 sur $]0, 1[$ et nulle sur $[1, \infty[$. Il est clair que $t^{r+1} f$ n'appartient pas à $C^m(\mathbf{R}_+)$ bien que $\mathfrak{M}(t^{r+1} f)(z) = (z+r+1)^{-m-1}$ appartienne à $\mathscr{H}_r^s$ pour $s < m + 1/2$.

Remarque 2. Si $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$, $m \geqslant 0$, et si $f^{(j)}(t) = O(t^{r-j})$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, il est clair que $f \in \mathscr{E}_{r'}^m$ pour tout $r' < r$, puisque $f^{(j)} = t^{r'-j} h_j$ avec $h_j \in \mathscr{E}$ (proposition 3.3). En général, on ne peut pas remplacer r' par r: une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ qui est égale à $|\log t|^{-1/2}$ au voisinage de 0 vérifie $f^{(j)}(t) = o(t^{-j})$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$. Cependant, quel que soit $s \in \mathbf{R}$, f n'appartient pas à $\mathscr{E}_0^s$; en effet, $\mathfrak{M}f(z) - C z^{-1/2}$ (C constante $\neq 0$) est entière.

La proposition suivante donne des conditions pour qu'une fonction de classe C^{m-1} soit dans $\mathscr{E}_r^m$.

PROPOSITION 3.5. *Soit m un entier $\geqslant 1$, $r \in \mathbf{R}$ et $f \in C^{m-1}(\mathbf{R}_+)$ à support borné telle que $t^{m-r} f^{(m)} = g \in \mathscr{E}$.*

a) *Si $r < 0$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$.*

b) *Si $r > m - 1$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si $f^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m - 1$.*

c) *Si $0 \leqslant r \leqslant m - 1$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si $f^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j < r$ et $f^{(r)} \in \mathscr{E}$ si r entier.*

Démonstration. Soit $F = \mathfrak{M}f$ et $G = \mathfrak{M}g \in \mathscr{H}$. Par hypothèse $\mathfrak{M}(f^{(m)})(z) = (-1)^m (z-1)(z-2)\dots(z-m) F(z-m) = G(z+r-m)$. On a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si

$$G_0(z) = (z+1)^m F(z-r) = \frac{(-1)^m (z+1)^m G(z)}{(z-r)(z-r+1)\dots(z-r+m-1)}$$

est une fonction de $\mathscr{H}$.

a) Si $r < 0$, il est clair que $G_0 \in \mathscr{H}$ donc $f \in \mathscr{E}_r^m$.

b) Si $r > m-1$, $G_0 \in \mathscr{H}$ si et seulement si $G(r-j) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Puisque $f^{(m)} = t^{r-m} g$, on a pour $0 \leqslant j \leqslant m-1$

$$f^{(j)}(t) = \int_\infty^t \frac{(t-u)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} u^{r-m} g(u)\, du$$

$$= \sum_{k=0}^{m-j-1} \frac{(-1)^{m-k-j-1}}{k!\,(m-k-j-1)!} t^k \int_\infty^t u^{r-k-j-1} g(u)\, du .$$

Mais, si $\alpha > 0$, $\int_\infty^t u^{\alpha-1} g(u)\, du = -G(\alpha) + o(t^\alpha)$. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, lorsque $t \to +0$,

$$\left| \int_0^t u^{\alpha-1} g(u)\, du \right|^2 \leqslant \int_0^t u^{2\alpha-1}\, du \int_0^t |g(u)|^2 u^{-1}\, du = o(t^{2\alpha}) .$$

Par suite

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j-1)!} G(r-j) + o(1), \tag{3.5}$$

et $G(r-j) = 0$ si et seulement si $f^{(j)}(t) = o(1)$.

c) Si $0 \leqslant r \leqslant m-1$, $G_0 \in \mathscr{H}$ si et seulement si $G(r-j) = 0$ pour $0 \leqslant j < r$ et $z^{-1}G \in \mathscr{H}$ dans le cas où r est entier. Comme précédemment l'égalité (3.5) est valable pour $0 \leqslant j < r$. On a donc $G(r-j) = 0$ si et seulement si $f^{(j)}(t) = o(1)$, avec $0 \leqslant j < r$.

Dans le cas où r est entier, $f \in \mathscr{E}_r^m$ entraîne $f^{(r)} \in \mathscr{E}$. Inversement, si $f^{(r)} = h \in \mathscr{E}$ et si $f^{(j)}(t) = o(1)$ pour $0 \leqslant j < r$ avec $r \geqslant 1$,

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} h(u)\, du = t^r h_0(t)$$

où

$$h_0(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-s)^{r-1} h(st)\, ds$$

appartient à $\mathscr{E}$. Il s'ensuit que $F(z-r) = \mathfrak{M}h_0(z)$ est dans $\mathscr{H}$ donc aussi G_0, c.q.f.d.

PROPOSITION 3.6. 1) *L'intersection des espaces* $\mathscr{E}_r^s$, $r, s \in \mathbf{R}$, *est égale à l'ensemble* C_0^∞ *des fonctions* C^∞ *sur* $[0, \infty[$, *à support borné, plates en* 0.

2) $\mathscr{E}'_+$ *est égal à la réunion des espaces* $\mathscr{E}^s_r$, $r, s \in \mathbf{R}$.

Démonstration. 1) Si $f \in \mathscr{E}^{m+1}_m$ avec $m \in \mathbf{N}$, la proposition 3.4 montre que f est de classe C^m sur $[0, \infty[$ et que $f^{(j)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$; il suffit de prendre m arbitrairement grand pour obtenir $f \in C^\infty_0$.

Si $f \in C^\infty_0$, la proposition 3.5 montre que $f \in \mathscr{E}^m_r$ quels que soient $m \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{R}$.

2) Si $T \in \mathscr{E}'_+$, la proposition 1.5 entraîne que $T = D^m(t^{-q}g)$ avec $m, q \in \mathbf{N}$ et $g \in C^0_+$. Or $f = tg \in \mathscr{E}$ et $T = D^m(t^{-(q+1)}f)$ appartient à $\mathscr{E}^{-m}_{-(q+1)}$ en raison de la proposition 3.3 et de la formule de Leibniz.

4. Comportement asymptotique au voisinage de l'origine

Soit $\mathscr{E}^{-\infty}_r$ la réunion des espaces $\mathscr{E}^s_r$, $s \in \mathbf{R}$. On peut considérer que l'appartenance à $\mathscr{E}^{-\infty}_r$ caractérise *l'ordre de grandeur* d'une distribution au voisinage de l'origine. En effet, le théorème 3.1 montre que cette appartenance est une propriété du germe à l'origine; d'autre part, l'égalité $\mathscr{E}^{-\infty}_r = t^r \mathscr{E}^{-\infty}_0$ qui résulte de (2.9) et les propositions 3.4 et 3.5 montrent que la propriété $T \in \mathscr{E}^{-\infty}_r$ est voisine des propriétés $T = o(t^r)$ ou $T = O(t^r)$ lorsque $t \to +0$.

Exemples. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support borné égale à 1 au voisinage de 0. Posons $X = \mathfrak{M}\chi$. On a $X(z) = z^{-1}\Phi(z)$, où $\Phi = -\mathfrak{M}(D\chi)$ est la transformée de Mellin d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ (voir le théorème 3.1 pour les propriétés de Φ) et $\Phi(0) = 1$. Pour $p \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$ posons

$$\chi_{p,k}(t) = t^p (\log t)^k \chi(t). \tag{4.1}$$

On a $X_{p,k}(z) = \mathfrak{M}\chi_{p,k}(z) = X^{(k)}(z+p)$, fonction méromorphe de z avec un pôle d'ordre $k+1$ en $-p$, de partie principale $(-1)^k\, k!\, (z+p)^{-(k+1)}$. De plus, si le support de χ est contenu dans $]0, a]$, quel que soit $m \in \mathbf{N}$,

$$(1+|z|)^m (z+p)^{k+1} X_{p,k}(z)\, a^{-\operatorname{Re} z} \text{ est borné pour } \operatorname{Re} z \geqslant -m. \tag{4.2}$$

Etant donné s réel, on a $\chi_{p,k} \in \mathscr{E}^s_r$ si et seulement si $\operatorname{Re} p > r$.