Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HALBGRUPPEN UND RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE
Autor: Bauer, Heinz
Kapitel: 2. Harmonische räume und fellersche halbgruppen
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50369

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

mit dem positiven Faktor

$$c_n = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Der sich durch Integration der Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ ergebende Kern

$$V = \int_0^\infty P_t \, dt \tag{8}$$

ist somit nichts anderes als der durch Faltung mit Hilfe des Maßes

$$\kappa = c_n N \lambda^n \tag{9}$$

wirkende Kern $Vf = \kappa * f$.

Damit sind es die drei Objekte Δ, N und $(P_t)_{t>0}$, die im Mittelpunkt der klassischen Potentialtheorie stehen. Jedes dieser Objekte erlaubt die Definition der (global definierten) hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$. Aus der Kenntnis eines dieser Objekte folgt die der anderen, denn N ist die Fundamentallösung von (1), interpretiert als der zu κ gehörige Faltungskern V, berechnet sich N gemäß (8) aus $(P_t)_{t>0}$, ferner ist Δ der infinitesimale Erzeuger von $(P_t)_{t>0}$, d.h. es gilt

$$\Delta f = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} \tag{10}$$

für alle Funktionen $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ mit kompakten Träger. Hierzu vergleiche man Berg-Forst [7].

Der Satz 1.1 ist der Schlüssel zum wahrscheinlichkeitstheoretischen Verständnis potentialtheoretischer Begriffsbildungen. Hierauf soll aber hier nicht eingegangen werden. (Vgl. jedoch [2].)

2. Harmonische Räume und fellersche Halbgruppen

Die weiteren Teile des Vortrages werden vor allem durch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen lokaler Potentialtheorie und Halbgruppen von Kernen motiviert.

Als lokale Potentialtheorie verstehen wir dabei die Theorie der harmonischen Räume, die sich aus der Idee entwickelt hat, die Theorie der Laplace-Gleichung (1) auf allgemeinere elliptische und parabolische Differentialgleichungen etwa mit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Grundraum zu entwickeln. (Vgl. hierzu [1], Brelot [10], [11], [12] und Constantinescu-Cornea [13].)

Der Einfachheit halber sollen hier harmonische Räume nur im Sinne von BRELOT [10] verstanden werden. Es sei demnach X ein lokal-kompakter, (Hausdorff-) Raum und $\mathscr{H}$ ein Garbendatum von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen. $(X,\mathscr{H})$ heißt dann ein *Brelot-Raum*, wenn X keine isolierten Punkte besitzt und lokal-zusammenhängend ist, eine Basis regulärer Mengen existiert (per definitionem ist für diese das Dirichletsche Problem für alle stetigen Randwerte eindeutig und „positiv" lösbar) und das Brelotsche Konvergenzaxiom erfüllt ist. Wir werden nur *strenge* oder $\mathfrak{P}$-Brelot-Räume betrachten, also solche mit mindestens einem Potential $p \neq 0$. Die Definition dieser Begriffsbildungen findet man in [10], [11] und [1]. Für $n \geqslant 3$ liefert das Garbendatum $\mathscr{H}_\Delta$ der Lösungen von (1), also der klassischen harmonischen Lösungen, den strengen Brelot-Raum $(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_\Delta)$.

Ausgelöst durch die Untersuchung Markovscher Prozesse haben sich in zunehmendem Maße spezielle Halbgruppen von Kernen als wichtig erwiesen. Auf einem lokal-kompakten Raum X mit abzählbarer Basis sei $(P_t)_{t>0}$ eine Halbgruppe von *Kernen*. Jedes P_t ist also eine Funktion auf $X \times \mathfrak{B}_X$, wobei $\mathfrak{B}_X$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen bezeichnet; für jedes $A_0 \in \mathfrak{B}_X$ bzw. $x_0 \in X$ werden dabei die Abbildungen $A \mapsto P_t(x_0, A)$ bzw. $x \mapsto P_t(x, A_0)$ als nicht-negative Maße auf $\mathfrak{B}_X$ bzw. als (nicht-negative) Borel-meßbare Funktionen vorausgesetzt. Durch Integration nach der zweiten Variablen wirkt jedes P_t als linearer Operator auf geeigneten Räumen meßbarer Funktionen:

$$P_t f(x) = \int P_t(x, dy)\, f(y) \tag{11}$$

(z.B. für Borel-meßbares $f \geqslant 0$). Die Halbgruppeneigenschaft besagt nichts anderes als

$$P_{s+t} f = P_s P_t f \tag{12}$$

für alle Borel-meßbaren Funktionen $f \geqslant 0$ und für alle $s, t > 0$ oder — äquivalent hierzu —

$$P_{s+t}(x, A) = \int P_s(x, dy)\, P_t(y, A) \tag{13}$$

für alle $x \in X$ und $A \in \mathfrak{B}_X$. Es müssen also die sogenannten Chapman-Kolmogorov-Gleichungen erfüllt sein.[1])

Eine solche Halbgruppe von Kernen heißt *Fellersch*, wenn jeder Kern P_t sub-Markovsch, also $P_t 1 \leqslant 1$ erfüllt ist, wenn P_t den Raum $C_0(X)$ der im Unendlichen verschwindenden, stetigen, reellen Funktionen auf X in sich abbildet, und wenn außerdem

[1]) Vgl. hierzu [3] und MEYER [24].

$$\lim_{t \to 0} P_t f = f \qquad \textit{für alle } f \in C_0(X)$$

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz erfüllt ist. Einer solchen Fellerschen Halbgruppe sind wir in der klassischen Theorie bereits begegnet: die Brownsche Halbgruppe ist Fellersch. Jeder der Kerne P_t ist dort sogar Markovsch, erfüllt also $P_t 1 = 1$.

Eines der Leitmotive für die Entwicklung der Theorie der harmonischen Räume war, über Jahre hinweg, die Frage nach der Existenz einer Halbgruppe von Kernen auf einem streng harmonischen Raum $(X, \mathscr{H})$ derart, daß, wie in der klassischen Theorie, die exzessiven Funktionen mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ auf X übereinstimmen. Hyperharmonisch heissen dabei die durch die Mittelwerteigenschaft (für reguläre Mengen) definierten nach unten halbstetigen Funktionen. Die Antwort auf diese Frage ist Ja. Sie wurde durch MEYER [23] für Brelotsche und später durch BOBOC-CONSTANTINESCU-CORNEA [9] und HANSEN [18], [19] für allgemeinere Typen harmonischer Räume gegeben:

2.1. *Auf einem streng harmonischen Raum* $(X, \mathscr{H})$ *existieren stets ein strikt positives, stetiges, reelles Potential* q *und eine Fellersche Halbgruppe* $(Q_t)_{t>0}$ *derart, dass deren exzessive Funktionen mit den mit* $\frac{1}{q}$ *multiplizierten nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen übereinstimmen.*

Ist die konstante Funktion 1 *hyperharmonisch, so fallen die nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen mit den exzessiven Funktionen der neuen Halbgruppe*

$$P_t f = q\, Q_t\left(\frac{1}{q} f\right) \qquad (f \in C_0(X)) \tag{14}$$

zusammen.

Man nennt die Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ auf Grund ihrer Herkunft auch *quasi-Fellersch.*

3. DER SATZ VON G. FORST

Im Gegensatz zu der dem Resultat 2.1 zugrunde liegenden Fragestellung ist die umgekehrte Frage nach Eigenschaften einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Raum X, welche die Existenz eines Garbendatums $\mathscr{H}$ garantieren, so daß $(X, \mathscr{H})$ ein harmonischer Raum und die exzessiven Funktionen von $(P_t)_{t>0}$ mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ zusammenfallen, neueren Datums. Es sind nur Teilantworten bekannt.