I. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE

$$x(x+1) = ky(y+1)$$

par Abou-Dardaye BARRY

I. INTRODUCTION

S. Thouvenot a résolu ici [6], aux notations près, l'équation diophantienne

$$x(x+1) = ky(y+1) \quad (k = 1, 2, \text{ etc.}), \tag{1}$$

pour $k = 2$, ce que faisait Whitworth, dès 1900 [2]. D'ailleurs, Dickson, rendant compte d'un résultat dû à Boutin (1895), note dans sa célèbre Histoire [2], que (1) possède une infinité de solutions dans **N**, si k n'est pas un carré, mais seulement un nombre fini de solutions, si $k = k'^2$; en particulier $k' = 2(2h+1)$ entraîne $x = 4h(h+1)$, $y = h$. D'autre part, Schinzel a établi que (1) n'est vérifiée dans **N** que par la solution triviale $x = y = 0$, si $k = p^{2n}$ (p premier et n entier positif) [7].

Dans cet article, nous faisons retour sur (1), pour en déterminer *toutes* les solutions, quel que soit k, grâce aux équations de Pell-Fermat généralisées

$$p^2 - kq^2 = m, \tag{2}$$

où m dépend de k. Dans une autre partie, nous donnerons un traitement spécial de la question, lorsque k est carré. Ce que nous résumerons par le résultat qui suit.

II. THÉORÈME. *La résolution dans* **N** *de l'équation diophantienne* (1) *peut se ramener à celle de l'équation de Pell-Fermat généralisée* (2), *où* $m \in D(k)$, *ensemble des diviseurs du facteur libre de tout carré* ($\neq 1$) *de* $k(k-1)$.

Deux cas sont possibles :

1°) *k non carré*

Si (2) *possède des solutions entières (en nombre nécessairement infini) pour un* $m \in D(k)$, *alors toutes les solutions entières correspondantes de* (1) *sont contenues dans les formules*

(3) $$x = kq(q+p)/m\,,\ y = q(kq+p)/m\,,$$

ou

(3′) $$x = p(kq-p)/m\,,\ y = q(kq-p)/m\,.$$

2°) $k = k'^2$

Si $k = 1$, (1) *est trivialement satisfaite dans* **N** *par* $x = y$.

Si $k \neq 1$, (1) *a un nombre fini de solutions dans* **N**, *déterminées par* (2), (3) *ou* (3′), *ou encore, de façon équivalente et à une permutation près de* α *et* β,

(4) $$x = \alpha a - 1 \text{ ou } \beta b,\ y = (c-1)/2\,,$$

où

$$\alpha\beta = k = k'^2,\ \alpha a - \beta b = 1 \text{ et } 4ab + 1 = c^2 \ (c \text{ entier impair}).$$

Inversement, étant donné des entiers naturels x, y *quelconques, définis par* (2), (3) *ou* (3′), *ou encore* (4), *l équation* (1) *est satisfaite pour ces éléments de* **N**.

Preuve. Partons du résultat élémentaire suivant, qui date de Diophante au moins [4]: *8 fois un nombre triangulaire augmenté de* 1 *est un carré.* En effet

(5) $$8 \cdot x(x+1)/2 + 1 = (2x+1)^2\,.$$

Ceci posé, mettons (1) sous la forme équivalente

$$8 \cdot x(x+1)/2 + 1 = 4ky(y+1) + 1\,,$$

ou, par (5),

(6) $$(2x+1)^2 = (2ky+1)^2 - k(k-1)(2y)^2\,.$$

Pour $k = 1$, (6) implique $x = y$, donc (1) est trivialement satisfaite dans **N**. *Inversément*, si $x = y \neq 0$ (l'hypothèse $x = 0$, ou $y = 0$ étant sans intérêt, puisque, quel que soit k, $x = 0$ équivaut à $y = 0$), il est évident que $k = 1$.

Supposons donc désormais $k \neq 1$

Dans ce cas, la décomposition en facteurs premiers de $k(k-1)$ permet de poser

(7) $$k(k-1) = h^2 mn\,,$$

les facteurs carrés de $k(k-1)$ étant regroupés dans h^2, et mn libre de tout carré *(square-free)*, ce qui implique en particulier $(m, n) = 1$.

Tout le problème se ramène alors à la résolution dans **N** de l'équation diophantienne

$$(8) \qquad (2ky+1)^2 - mn(2hy)^2 = (2x+1)^2 .$$

Pour cela, nous envisagerons deux cas:

1) *mn pair*

Il est alors nécessaire et suffisant de poser [3]:

$$2ky + 1 + 2hy\sqrt{mn} = \lambda(r\sqrt{m} \pm qh\sqrt{n})^2 ,$$

ou, y étant positif,

$$(9) \qquad 2ky + 1 = \lambda(mr^2 + nq^2h^2) , \quad y = \lambda rq ,$$

où r et q sont des entiers positifs tels que $(r, qh) = 1$ et λ un entier positif quelconque.

Mais λ, qui doit diviser à la fois y et $2ky + 1$, est nécessairement égal à 1. Donc, (9) équivaut à

$$(10) \qquad mr^2 - 2kqr + nq^2h^2 - 1 = 0 .$$

Par suite, r de (10) sera un entier positif si et seulement s'il existe un entier positif, p, premier avec q, tel que

$$k^2q^2 - m(nq^2h^2 - 1) = p^2 ,$$

i.e.

$$(k^2 - h^2mn)q^2 + m = p^2 ,$$

ou, compte tenu de (7), la relation annoncée

$$(2) \qquad p^2 - kq^2 = m .$$

2) *mn impair*

Il s'ensuit aussitôt que m et n sont tous deux impairs. D'autre part, (8) est réalisée dans ce cas dans **N** si et seulement si [3]:

$$2ky + 1 + 2hy\sqrt{mn} = (1/2)\lambda(r\sqrt{m} + qh\sqrt{n})^2 ,$$

c'est-à-dire

$$(11) \qquad 2ky + 1 = (1/2)\lambda(mr^2 + nq^2h^2) , \qquad y = (1/2)\lambda rq ,$$

où r et q sont des entiers positifs vérifiant $(r, qh) = 1$, et λ un entier positif quelconque.

Mais, comme m et n sont impairs, il résulte de (7) que h est pair. En outre, r est impair, puisque $(r, qh) = 1$, et il en est donc de même de $mr^2 + nq^2 h^2$. Par suite, il est nécessaire de supposer λ pair. En effectuant ainsi la substitution $\lambda \mapsto 2\lambda$ dans (11), et en posant $\lambda = 1$ (ce qui est nécessaire, comme précédemment), l'on est ramené au cas mn pair.

Occupons-nous à présent de résoudre effectivement (1) en entiers positifs. Tout d'abord, de (10) l'on tire

$$r = (kq \pm p) / m . \tag{12}$$

De plus, si l'on substitue dans (8) les égalités (9), avec $\lambda = 1$, il vient, compte tenu de (2),

$$(1 + 2kq\,(q \pm p)/m)^2 = (2x+1)^2 . \tag{8'}$$

Ainsi, (8′), (9) (avec $\lambda = 1$) et la forme

$$r = (kq + p) / m \tag{12'}$$

de (12) donnent

$$x = kq\,(q+p) / m , \quad y = q\,(kq+p) / m . \tag{13}$$

Comme, d'autre part, $q < p$ (sinon (2) serait impossible), (8′), (9) (où $\lambda = 1$) et

$$r = (kq - p) / m \tag{12''}$$

conduisent à la seconde classe de solutions

$$x = p\,(kq-p) / m , \qquad y = q\,(kq-p) / m . \tag{13'}$$

(Il va de soi que $kq - p > 0$, sinon nous aurions, ou $kq - p = 0$, ce qui est évidemment impossible, ou $m > k\,(k-1)$, ce qui n'est pas non plus.)

Pour préciser les résultats ainsi obtenus, il est nécessaire d'étudier de plus près (2). Les deux cas suivants y suffiront.

1) *k non carré*

Si $m = 1$, (2) n'est autre que l'équation de Pell-Fermat [5]. Elle admet une infinité de solutions dans **N**, et il en est donc de même de (1), dont les solutions sont définies par (13) ou (13′).

Si $m \neq 1$, (2) n'a en général pas de solutions dans **N**, comme le montre la théorie des corps quadratiques [8], ou celles des fractions continues [5].

Il reste maintenant à examiner si (13) et (13′) définissent effectivement des nombres entiers.

Observons tout d'abord que r, donné par (12′) et (12″), est un *entier*. Et comme, d'autre part, (13) et (13′) peuvent s'écrire respectivement

$$x = kqr - \frac{k(k-1)}{m} q^2 , \; y = qr \quad \text{et} \quad x = pr , \; y = qr ,$$

il est évident que x et y sont entiers, puisque m divise $k(k-1)$, par définition.

2) k *carré*

Posons $k = k'^2$.

Si $m = 1$, (2) admet pour toute solution entière $p = 1$, $q = 0$, et il en résulte $x = y = 0$.

Si $m \neq 1$, les solutions de (2) sont à chercher dans Q^+. En effet, pour $m = m_1 m_2$ ($m_2 < m_1$, par exemple et m_1, m_2 entiers), l'équation (2) se réduit au système

$$p + k' q = m_1 , \; p - k' q = m_2 ,$$

et nous en tirons

$$(S) \qquad p = (m_1 + m_2)/2 , \; q = (m_1 - m_2)/2k' .$$

Mais (S) définit en règle générale p et q dans Q^+. (Exemple : $k' = 6$, $m = 5$, $m_1 = 5$, $m_2 = 1$ donnent de (S) la forme $p = 3$, $q = 1/3$.) Donc le nombre de solutions de (1) est au plus égal au nombre de factorisations de m en deux facteurs, i.e. fini. Par exemple, comme $k' = 6$ et $m = 5$ entraînent $p = 3$, $q = 1/3$, il vient, par (13), $x = 8$, $y = 1$, solution que l'on retrouve, pour $m = 7$, si l'on utilise (13′).

Nous pouvons, cependant, résoudre (1) entièrement dans **N**, sans le relais des rationnels. En effet, posons

$$(14) \qquad k = k'^2 = \alpha\beta .$$

Alors, à une permutation près de α et β, nous pouvons supposer que α et β divisent respectivement $x + 1$ et x, ou

$$(15) \qquad x + 1 = \alpha a , \; x = \beta b ,$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad \alpha a - \beta b = 1 ,$$

où a et b sont des entiers positifs (premiers entre eux) à déterminer, et α et β des *carrés*, puisqu'ils sont premiers entre eux et que leur produit est un carré.

Avec ces transformations, (1) se réduit à

$$ab = y(y+1),$$

donc

$$4ab + 1 = (2y+1)^2, \tag{17}$$

ce qui définira un y de $\mathbf{N}$ si et seulement si $4ab + 1$ est un carré, i.e. s'il existe un entier impair positif c tel que

$$4ab + 1 = c^2. \tag{18}$$

De (17) et (18), l'on déduit alors

$$y = (c-1)/2. \tag{19}$$

Ainsi se trouve résolue, entièrement dans $\mathbf{N}$, l'équation (1), lorsque k est un carré.

Cette même méthode permet d'ailleurs, de montrer que *le nombre de solutions de* (1) *est fini, lorsque* $k = k'^2 \neq 1$.

En effet, la résolution de l'équation diophantienne (16) donne

$$a = \beta t + a_0, \quad b = \alpha t + b_0 \quad (t \in \mathbf{N}), \tag{20}$$

où

$$\alpha a_0 - \beta b_0 = 1, \tag{21}$$

et

$$a_0 < \beta, \; b_0 < \alpha \, [1].$$

D'autre part, compte tenu de (20), (18) devient, par des transformations élémentaires,

$$(2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0)^2 + \alpha\beta(4a_0b_0 + 1) - (\alpha a_0 + \beta b_0)^2 = \alpha\beta c^2. \tag{22}$$

Or, l'élévation au carré de (21) ramène (22) à

$$(2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0)^2 + \alpha\beta - 1 = u^2, \tag{23}$$

où $u^2 = \alpha\beta c^2$ ($\alpha\beta$ étant un carré.)

Dès lors, la factorisation $\alpha\beta - 1 = \alpha_1 \beta_1$, où α_1 et β_1 sont de même parité et vérifient, par exemple, $\beta_1 < \alpha_1$, réduit (23) au système

$$u + (2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0) = \alpha_1 , \; u - (2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0) = \beta_1 .$$

Il en résulte

$$2\alpha\beta t + \alpha a_0 + \beta b_0 = (\alpha_1 - \beta_1) / 2 . \tag{24}$$

Or, les couples (α_1, β_1) étant en nombre fini, il en est de même des entiers t de (24). Donc, le nombre de solutions de (1) est bien fini, lorsque $k = k'^2$. Celles-ci, qui doivent correspondre aux $t \geqslant 0$, sont définies, compte tenu de (15), (18) et (19), par

$$x = \alpha a - 1 \text{ ou } \beta b , \; y = h , \tag{25}$$

où

$$ab = h(h+1) . \tag{26}$$

Dans les applications numériques, on utilisera successivement (20), (24), (26) et (25).

Inversement, supposons donnés des entiers positifs x, y vérifiant (13), où p et q sont définis par (2). Alors, (1) est satisfaite dans **N**.

En effet, si $k \neq 1$ (le problème étant trivial dans l'hypothèse contraire), (2) implique

$$k^2 q^2 + mk + p^2 = kq^2 + kp^2 + m .$$

D'où, en multipliant les deux membres de cette égalité par q et en leur ajoutant ensuite $2kq^2p + mp$, nous tirons

$$(q+p)\big(kq(q+p)+m\big) = (kq+p)\big(q(kq+p)+m\big) .$$

Mais ce résultat n'est autre que (1), puisque, par (13),

$$kq(q+p)/m = x , \; q(kq+p)/m = y .$$

Le problème se résout tout aussi simplement, si nous partons de (13').

Et si maintenant x et y sont définis par (25), il est évident que $x(x+1) = \alpha\beta\, ab$, et (1) résulte alors de (26) et (14).

Ainsi, notre théorème est entièrement établi.

Il ne nous reste plus qu'à dire un mot sur les applications numériques.