1. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $\varphi(t)=\left(\varphi\left(t/\sqrt{c}\right)\right)^c$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES A LA LOI NORMALE

par Aimé FUCHS et Giorgio LETTA

Dans le présent article nous nous proposons de donner des démonstrations élémentaires de certaines caractérisations de la loi normale. Il s'agit de démonstrations plus simples que celles qui se trouvent couramment dans la littérature; en outre elles ne font appel à aucune hypothèse d'existence de moments. L'outil qui est à la base de ces démonstrations est constitué par les deux équations fonctionnelles

$$\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{c}))^c \qquad (c \text{ constante réelle } > 1),$$
$$(\varphi(t))^2 = \varphi(t+u)\,\varphi(t-u)\,\theta(u).$$

La dernière de ces équations (qui, comme nous le verrons, se ramène aussitôt à la première) permet notamment de démontrer très simplement le théorème de Bernstein-Darmois. En revanche la démonstration du théorème de Skitovitch-Darmois semble échapper aux méthodes élémentaires de cet article.

1. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{c}))^c$.

(1.1) LEMME. *Soient μ une loi de probabilité sur* $\mathbf{R}$ *(n'admettant pas nécessairement un moment du second ordre fini), φ sa fonction caractéristique. Alors on a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\mathscr{R}\varphi(t)}{t^2} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu(x).$$

Démonstration. Posons, pour tout nombre réel t non nul,

$$I_t = \frac{1-\mathscr{R}\varphi(t)}{t^2} = \int_{\mathbf{R}} \frac{1-\cos tx}{t^2}\, d\mu(x).$$

Le quotient $\dfrac{1-\cos tx}{t^2}$ est compris entre 0 et $\dfrac{1}{2}x^2$; en outre il converge vers $\dfrac{1}{2}x^2$ lorsque t rend vers 0. On a donc

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu(x) \leqq \liminf_{t\to 0} I_t \leqq \limsup_{t\to 0} I_t \leqq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu(x) ,$$

où la première inégalité résulte du lemme de Fatou, les autres étant évidentes.

Remarque. Il résulte de ce lemme que s'il existe une suite (t_n) de nombres réels non nuls, tendant vers 0 et telle que l'on ait $\varphi(t_n) = 1$ pour tout n, alors la loi μ a un moment du second ordre nul, c'est-à-dire qu'elle est dégénérée.

(1.2) THÉORÈME. *Soient μ une loi de probabilité sur $\mathbf{R}$, φ sa fonction caractéristique, c un nombre réel, avec $c > 1$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *μ est normale et centrée ;*

(b) *φ est réelle et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{c}))^c$$

pour tout nombre réel t assez petit.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. On a alors, pour tout nombre réel t assez petit et pour tout entier $n \geqq 1$:

$$\varphi(t) > 0 , \qquad \varphi\left(tc^{-\frac{n}{2}}\right) = (\varphi(t))^{\frac{1}{c^n}} .$$

Par conséquent, si l'on désigne par σ^2 le moment du second ordre de μ (non supposé *a priori* fini!), le lemme précédent entraîne (pour tout t assez petit et non nul)

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\varphi\left(tc^{-\frac{n}{2}}\right)}{\left(tc^{-\frac{n}{2}}\right)^2} = \frac{1}{t^2}\lim_{n\to\infty} c^n\left[1-(\varphi(t))^{c^{-n}}\right]$$

$$= -\frac{1}{t^2}\operatorname{Log}\varphi(t) < +\infty ,$$

d'où $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$.

On voit ainsi que la fonction caractéristique φ coïncide, dans un voisinage de l'origine, avec la fonction caractéristique d'une loi normale centrée;

d'après un résultat connu, cette coïncidence a donc lieu partout, et le théorème est démontré.

Dans le cas particulier où le nombre c est un entier, on peut supprimer, dans l'énoncé de la condition (b) du théorème précédent, l'hypothèse que φ est réelle. On a en effet le corollaire suivant:

(1.3) COROLLAIRE. *Soient μ une loi de probabilité sur* $\mathbf{R}$, *φ sa fonction caractéristique, n un entier, avec $n > 1$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *μ est normale et centrée ;*

(b) *φ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(t) = \left(\varphi(t/\sqrt{n})\right)^n$$

pour tout nombre réel t assez petit.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc que la fonction caractéristique φ (non supposé *a priori* réelle) possède la propriété (b); il en est alors de même de la fonction caractéristique *réelle* $\varphi\,\bar{\varphi}$; d'après le théorème précédent, celle-ci est donc la fonction caractéristique d'une loi normale. Mais alors, d'après le théorème classique de Cramér-Lévy, la fonction φ possède elle même cette propriété; en d'autres termes, la loi μ est normale. Une simple vérification suffit ensuite pour montrer que μ est aussi centrée.

Le corollaire (1.3) peut être reformulé, dans le langage des variables aléatoires, sous la forme suivante:

(1.4) COROLLAIRE. *Soient n un entier, avec $n > 1$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un système de n variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi μ. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *μ est normale et centrée ;*

(b) *la loi de $(X_1 + \ldots + X_n) / \sqrt{n}$ coïncide avec μ.* [1])

Le corollaire (1.4) est susceptible d'une application intéressante: il permet en effet de démontrer rapidement le théorème de Maxwell sur la répartition des vitesses dans un gaz parfait.

---

[1]) La propriété (*b*) est évidemment vérifiée si μ est une loi stable *stricte* d'exposant caractéristique $\alpha = 2$ (au sens de [3], page 166). Le corollaire énoncé contient donc le résultat bien connu, selon lequel une telle loi est normale et centrée.

(1.5) THÉORÈME (Maxwell). *Soient n un entier, avec $n > 1$, et X un vecteur aléatoire, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, dont les composantes $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ont une même loi, qui est normale et centrée ;*

(b) *la loi du vecteur aléatoire X est invariante par rapport à toute rotation de $\mathbf{R}^n$ autour de l'origine.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. Pour tout indice $i = 1, \ldots, n$, il existe une rotation autour de l'origine qui transforme X en un vecteur aléatoire dont la première composante est égale à X_i. (Pour avoir une telle rotation, il suffit de prendre une matrice orthogonale, de déterminant égal à 1, admettant pour première ligne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.) On voit ainsi que chacune des composantes de X a même loi que X_1. Il existe d'autre part une rotation autour de l'origine qui transforme X en un vecteur aléatoire dont la première composante est égale à $(X_1 + \ldots + X_n) / \sqrt{n}$. (Pour avoir une telle rotation, il suffit de prendre une matrice orthogonale, de déterminant égal à 1, admettant pour première ligne le vecteur $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$.) La conclusion résulte du corollaire (1.4).

En calquant le raisonnement utilisé lors de la démonstration du Théorème (1.2), on peut obtenir une caractérisation analogue pour la loi de Cauchy:

(1.6) THÉORÈME. *Soient μ une loi de probabilité sur $\mathbf{R}$, φ sa fonction caractéristique, c un nombre réel, avec $c > 1$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *μ est, soit la loi dégénérée à l'origine, soit une loi de Cauchy symétrique ;*

(b) *φ est réelle, possède une dérivée à droite à l'origine (non supposée* a priori *finie) et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(t) = (\varphi(t/c))^c$$

pour tout nombre réel t.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. Commençons par montrer que φ ne peut pas s'annuler: si en effet φ s'annulait en t_0, elle s'annulerait en t_0/c, donc

en t_0/c^n pour tout $n \geqq 1$. La fonction φ étant continue, il en résulterait $\varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_0/c^n) = 0$, ce qui est impossible. Remarquons ensuite qu'on a, pour tout nombre réel t et pour tout entier $n \geqq 1$,

$$\varphi(t/c^n) = (\varphi(t))^{1/c^n}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par $-a$ $(a \geqq 0)$ la dérivée à droite de φ à l'origine (non supposée *a priori* finie), on a, pour tout $t > 0$,

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\varphi(tc^{-n})}{tc^{-n}} = \frac{1}{t} \lim_{n\to\infty} c^n [1-(\varphi(t))]^{c^{-n}}$$
$$= -\frac{1}{t} \operatorname{Log} \varphi(t) < +\infty,$$

d'où $\varphi(t) = \exp(-at)$.
Puisque d'autre part φ est réelle, donc paire, on a, pour tout nombre réel t,

$$\varphi(t) = \exp(-a\,|\,t\,|),$$

ce qui démontre le théorème.

On remarquera que le cas d'une loi dégénérée à l'origine correspond au cas où a est nul, c'est-à-dire au cas où φ est dérivable à l'origine.

Dans le cas particulier où c est un entier, le Théorème (1.6) peut être reformulé, dans le langage des variables aléatoires, sous la forme suivante:

(1.7) COROLLAIRE. *Soient n un entier, avec $n > 1$, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un système de n variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi μ. Si la fonction caractéristique φ de μ est réelle et possède une dérivée à droite à l'origine (non supposée* a priori *finie), alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *μ est, soit la loi dégénérée à l'origine, soit une loi de Cauchy symétrique ;*

(b) *la loi de $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ coïncide avec μ.*

Remarque. Si, étant donnée la loi μ symétrique et non dégénérée, au lieu de supposer la propriété (b) vérifiée pour un n fixé (ce qui est notre cas), on la supposait vérifiée pour *tout* entier n, ceci équivaudrait à supposer que μ est une loi stable stricte d'exposant caractéristique $\alpha = 1$ (au sens de [3], page 166). D'après le théorème de représentation des lois stables de P. Lévy, la loi μ serait alors une loi de Cauchy, et ceci indépendamment de toute hypothèse de dérivabilité de φ à l'origine.