2. Une généralisation de l'équation fonctionnelle du §1.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Une généralisation de l'équation fonctionnelle du § 1.

Si l'on regarde attentivement la démonstration du Théorème (1.5) de Maxwell, on s'aperçoit que, en ce qui concerne l'implication (b) $\Rightarrow$ (a), on n'a exploité l'hypothèse d'invariance par rotation que pour des rotations bien particulières, à savoir:

(a) des rotations dont la matrice admet comme lignes des vecteurs de la base canonique, éventuellement multipliés par -1;

(b) des rotations dont la matrice admet comme première ligne le vecteur $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$.

Les rotations du type (a) nous servaient en effet à démontrer préalablement l'égalité des lois des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$. *Une seule* rotation du type (b) suffisait ensuite à démontrer la nature gaussienne de la loi commune.

Dans le cas du plan, en se plaçant d'emblée dans l'hypothèse de l'égalité des lois, on peut même énoncer le résultat suivant, faisant intervenir une seule rotation.

(2.1) Théorème. *Soit* (X, Y) *un vecteur aléatoire, à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$, *dont les composantes sont indépendantes et de même loi* μ. *Désignons par* (X', Y') *le vecteur aléatoire*

$$((X-Y)/\sqrt{2}, \quad (X+Y)/\sqrt{2})$$

(transformé de (X, Y) *par une rotation de* $\pi/4$ *autour de l'origine). Si l'une des composantes de* (X', Y') *suit la loi* μ, *alors* μ *est normale et centrée.* [1])

Démonstration. Supposons d'abord que la composante $Y' = (X+Y)/\sqrt{2}$ suit la loi μ; le résultat est alors une conséquence du Corollaire (1.4) pour $n = 2$.

Supposons ensuite que la composante $X' = (X-Y)/\sqrt{2}$ suit la loi μ. On voit alors que μ est une loi symétrique; donc $-Y$ suit la même loi que Y, et l'on est ramené au cas précédent.

De façon plus générale, on peut se poser le problème suivant:

---

[1]) Il en résulte accessoirement que l'autre composante suit également la loi μ et que les deux composantes sont indépendantes.

Soit X un vecteur aléatoire, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ (avec $n > 1$), dont les composantes sont indépendantes et de même loi μ. Considérons le transformé Y de X par une rotation autour de l'origine, dont on désignera par $A = (a_{ij})$ la matrice. Supposons que cette rotation ne soit pas du type (a) ci-dessus, c'est-à-dire qu'il existe un indice i tel que chacun des éléments $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ de la i-ème ligne de A soit différent de 1 et de -1. Si, pour un tel indice i, la i-ème composante de Y, c'est-à-dire la variable aléatoire

$$Y_i = a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n ,$$

suit la loi μ, peut-on affirmer que μ est normale et centrée?

En faisant intervenir la fonction caractéristique φ de la loi μ, le problème peut être reformulé ainsi:

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un système de n nombres réels satisfaisant aux conditions

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1 , \qquad |a_i| < \text{pour tout } i .$$

Si φ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(t) = \varphi(a_1 t) \ldots \varphi(a_n t) , \tag{2.1}$$

peut-on affirmer que μ est normale et centrée?

La réponse est évidemment affirmative dans le cas particulier où les a_i sont égaux, car l'équation fonctionnelle (2.1) se réduit alors à l'équation fonctionnelle $\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{n})^n$ déjà étudiée au paragraphe précédent. Dans le cas général, la réponse est encore affirmative, mais elle exige une démonstration beaucoup plus délicate, fondée sur la théorie des lois limites de Kolmogorov: cf. [5], Théor. 7.2.1, pag. 161, où le problème est généralisé au cas d'une suite infinie de variables aléatoires (indépendantes et de même loi). [1])

3. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $(\varphi(t))^2 = \varphi(t+u)\,\varphi(t-u)\,\theta(u)$.

Le théorème qui suit est une conséquence immédiate de (1.2). Il nous servira à démontrer de façon très simple le théorème de Bernstein-Darmois.

(3.1) THÉORÈME. *Soient μ une loi de probabilité sur $\mathbf{R}$, φ sa fonction caractéristique. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

---

[1]) A signaler que l'énoncé du théorème de [5] cité ci-dessus est incorrect: en effet, il est faux si l'on prend $a_1 = \alpha$ et $a_i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. Pour le rendre correct, il suffit d'ajouter l'hypothèse: $|a_i| < |\alpha|$ pour tout i.