Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES A LA LOI NORMALE

Autor: Fuchs, Aimé / Letta, Giorgio

Kapitel: 5. Le théorème de Skitovitch-Darmois

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50371

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

A titre d'exemple, nous analyserons l'énoncé (4.1) dans deux *cas particuliers.*

a) Supposons d'abord

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que la variable aléatoire X_1 est normale (en revanche, on ne peut rien affirmer sur X_2). On peut d'ailleurs préciser que la variable aléatoire X_1 est dégénérée. Il suffit pour cela de remarquer que, dans le cas présent, l'équation (4.6) se réduit à la forme (4.7) avec $\theta(u) = 1$ (cf. (3.3)).

b) Supposons ensuite

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1 \cos\omega - X_2 \sin\omega$, $Y_2 = X_1 \sin\omega + X_2 \cos\omega$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, *et si ω n'est pas un multiple entier de $\pi / 2$,* le Théorème (4.1) permet d'affirmer que chacune des variables aléatoires X_1, X_2 est normale (en revanche, si ω est un multiple entier de $\pi / 2$, on ne peut rien affirmer, ni sur X_1 ni sur X_2). On reconnaîtra ici un résultat ayant des analogies avec le Théorème (2.1).

Remarquons enfin que l'énoncé du théorème de Bernstein-Darmois tel qu'il figure dans [3] (pag. 77 et pag. 499) est incorrect. En effet il entraîne notamment que, dans les hypothèses du cas particulier a) ci-dessus, la variable aléatoire X_2 est normale, ce qui est manifestement faux (il suffit, pour s'en convaincre, de prendre X_1 constante et X_2 non normale).

5. Le théorème de Skitovitch-Darmois

Voici l'énoncé du théorème de Skitovitch-Darmois mentionné au paragraphe précédent:

(5.1) Théorème. *Soit X un vecteur aléatoire, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, dont les composantes $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Considérons les deux variables aléatoires Y_1, Y_2 définies par les relations*

$$\begin{cases} Y_1 = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n \\ Y_2 = b_1X_1 + \ldots + b_nX_n \end{cases}.$$

où les coefficients a_i, b_i *sont des scalaires donnés. Si les variables aléatoires* Y_1, Y_2 *sont elles mêmes indépendantes, alors, pour chaque indice* i *tel que* $a_i b_i \neq 0$, *la loi de* X_i *est normale (éventuellement dégénérée).*

Ce théorème est bien plus profond que celui de Bernstein-Darmois (auquel il se réduit pour $n = 2$). Il permet en effet de démontrer directement le théorème de Cramér-Lévy, ainsi que certains résultats de α-factorisation. [1])

Il n'est donc pas étonnant que toutes les démonstrations connues du théorème de Skitovitch-Darmois fassent appel à des résultats profonds de la théorie des fonctions caractéristiques analytiques (théorème de Marcinkiewicz, théorèmes de α-factorisation). Voici en revanche une généralisation du théorème de Bernstein-Darmois qu'on peut obtenir par nos méthodes d'équations fonctionnelles.

(5.1) THÉORÈME. *Soit* X *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$, *dont les composantes* $X_1, \ldots, X_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes. Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice réelle* (n, n) *non singulière, et supposons que les composantes du vecteur aléatoire* $Y = AX$ *sont également indépendantes.*

Alors, pour chaque indice i *tel que la* i*-ème colonne de* A *possède au moins deux éléments non nuls, la loi de* X_i *est normale (éventuellement dégénérée).*

Pour rendre plus claire la démonstration, nous commencerons par démontrer un lemme préliminaire:

(5.2) LEMME. *Soit* X *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$. *dont les composantes* $X_1, \ldots, X_n$ *(par rapport à la base canonique* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *de* $\mathbf{R}^n$*) sont des variables aléatoires indépendantes* [2]). *Alors la fonction caractéristique* Φ *de* X *vérifie la relation*

$$\Phi(\mathbf{s})\,\Phi(\mathbf{s} + u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2) = \Phi(\mathbf{s} + u\mathbf{e}_1)\,\Phi(\mathbf{s} + v\mathbf{e}_2)$$

pour tout vecteur $\mathbf{s}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *et pour tout couple* (u, v) *de scalaires.*

---

[1]) Voici,par exemple, comment on peut en déduire le théorème de Cramér-Lévy (cf. [4], pag. 193). Soit λ, μ un couple de lois de probabilité sur $\mathbf{R}$, dont le produit de convolution est une loi normale; prenons un système de quatre variables aléatoires indépendantes X, X', Y, Y' tel que les lois de X et de X' coïncident avec λ et celles de Y et de Y' avec μ. Les deux variables aléatoires $(X + Y) + (X' + Y'), (X + Y) - (X' + Y'$ sont alors normales, non correlées, donc indépendantes. En appliquant le théorème de Skitovitch-Darmois pour $n = 4$, on en déduit que chacune des lois λ, μ est normale.

[2]) En fait, il suffirait de supposer que le triplet formé de X_1, X_2 et du système $(X_3, \ldots, X_n)$ est indépendant.

Démonstration du lemme. Désignons par φ_i la fonction caractéristique de X_i et par s_i la i-ème composante du vecteur $\mathbf{s}$ (par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$). On a alors

$$\Phi(\mathbf{s}) = \varphi_1(s_1)\,\varphi_2(s_2) \prod_{i=3}^{n} \varphi_i(s_i)\,,$$

$$\Phi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2) = \varphi_1(s_1+u)\,\varphi_2(s_2+v) \prod_{i=3}^{n} \varphi_i(s_i)\,,$$

$$\Phi(\mathbf{s})+u\mathbf{e}_1) = \varphi_1(s_1+u)\,\varphi_2(s_2) \prod_{i=3}^{n} \varphi_i(s_i)\,;$$

$$\Phi(\mathbf{s}+v\mathbf{e}_2) = \varphi_1(s_1)\,\varphi_2(s_2+v) \prod_{i=3}^{n} \varphi_i(s_i)\,,$$

d'où la conclusion.

Démonstration du théorème. Supposons que la première colonne de A possède deux éléments non nuls, et montrons que la loi de X_1 est normale. On pourra supposer, par exemple, $a_{11} \neq 0$ et $a_{21} \neq 0$. Quitte à multiplier chacune des deux premières lignes de A par un scalaire convenable, on pourra même supposer

$$a_{11} = a_{21} = 1\,. \tag{5.3}$$

Désignons par L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même dont la matrice, par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$, est la transposée de A. On a donc, pour tout i,

$$L\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i\,, \tag{5.4}$$

où $\mathbf{a}_i$ désigne le vecteur $(a_{i1}, \ldots a_{in})$.

Désignons en outre par φ_i la fonction caractéristique de X_i et par Φ celle de X:

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_1(t_1) \ldots \varphi_n(t_n)\,. \tag{5.5}$$

Le vecteur aléatoire $Y = AX$ admet alors comme fonction caractéristique la fonction composée $\psi = \Phi \circ L$. En lui appliquant le lemme précédent, on trouve, pour tout scalaire u et pour tout vecteur $\mathbf{s}$ de $\mathbf{R}^n$,

$$\psi(\mathbf{s})\,\psi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1-u\mathbf{e}_2) = \psi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1)\,\psi(\mathbf{s}-u\mathbf{e}_2)\,,$$

c'est-à-dire

$$\Phi(L\mathbf{s})\,\Phi(L\mathbf{s}+u\mathbf{a}_1-u\mathbf{a}_2) = \Phi(L\mathbf{s}+u\mathbf{a}_1)\,\Phi(L\mathbf{s}-u\mathbf{a}_2)\,.$$

Etant donné le scalaire t, appliquons cette relation au vecteur $\mathbf{s}$ déterminé

par $L\mathbf{s} = t\mathbf{e}_1$ (un tel vecteur existe puisque la matrice de L est régulière). On obtient

$$\Phi(t\mathbf{e}_1)\,\Phi\big(t\mathbf{e}_1 + u(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\big) = \Phi(t\mathbf{e}_1 + u\mathbf{a}_1)\,\Phi(t\mathbf{e}_1 - u\mathbf{a}_2)\,,$$

c'est-à-dire, grâce à (5.5) et (5.3),

$$\begin{aligned}(5.6)\qquad & \varphi_1(t)\,\varphi_1(t)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i\big(u(a_{1i}-a_{2i})\big)\\ &= \varphi_1(t+u)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i(ua_{1i})\,\varphi_1(t-u)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i(-ua_{2i})\,.\end{aligned}$$

Or, si $|u|$ est assez petit, on a $\varphi_i\big(u(a_{1i}-a_{2i})\big) \neq 0$ pour tout i, de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(5.7)\qquad \big(\varphi_1(t)\big)^2 = \varphi_1(t+u)\,\varphi_1(t-u\,\theta(u)\,.$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que φ_1 est la fonction caractéristique d'une loi normale.

6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents

Dans l'étude des équations fonctionnelles des paragraphes précédents, nous nous étions systématiquement bornés à rechercher les solutions dans l'ensemble des fonctions caractéristiques. Nous nous proposons maintenant d'étudier ces mêmes équations (ou des équations analogues) dans l'ensemble de toutes les fonctions complexes continues définies dans **R**.

Nous commencerons par l'équation fonctionnelle

$$(6.1)\qquad \big(f(t)\,|f(u)|\big)^2 = f(t+u)f(t-u)\,,$$

qui se réduit manifestement à l'équation (3.2) dans le cas où f est une fonction caractéristique.

(6.2) Théorème. *Soit f une application continue de* **R** *dans* **C**, *telle que* $f(0) = 1$.

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *f vérifie la relation* (6.1) *pour tout couple t, u de nombres réels ;*