6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

par $L\mathbf{s} = t\mathbf{e}_1$ (un tel vecteur existe puisque la matrice de L est régulière). On obtient

$$\Phi(t\mathbf{e}_1)\,\Phi\big(t\mathbf{e}_1 + u(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\big) = \Phi(t\mathbf{e}_1 + u\mathbf{a}_1)\,\Phi(t\mathbf{e}_1 - u\mathbf{a}_2)\,,$$

c'est-à-dire, grâce à (5.5) et (5.3),

$$\begin{aligned}(5.6)\qquad & \varphi_1(t)\,\varphi_1(t)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i\big(u(a_{1i}-a_{2i})\big)\\ &= \varphi_1(t+u)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i(ua_{1i})\,\varphi_1(t-u)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i(-ua_{2i})\,.\end{aligned}$$

Or, si $|u|$ est assez petit, on a $\varphi_i\big(u(a_{1i}-a_{2i})\big) \neq 0$ pour tout i, de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(5.7)\qquad \big(\varphi_1(t)\big)^2 = \varphi_1(t+u)\,\varphi_1(t-u\,\theta(u)\,.$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que φ_1 est la fonction caractéristique d'une loi normale.

6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents

Dans l'étude des équations fonctionnelles des paragraphes précédents, nous nous étions systématiquement bornés à rechercher les solutions dans l'ensemble des fonctions caractéristiques. Nous nous proposons maintenant d'étudier ces mêmes équations (ou des équations analogues) dans l'ensemble de toutes les fonctions complexes continues définies dans **R**.

Nous commencerons par l'équation fonctionnelle

$$(6.1)\qquad \big(f(t)\,|f(u)|\big)^2 = f(t+u)f(t-u)\,,$$

qui se réduit manifestement à l'équation (3.2) dans le cas où f est une fonction caractéristique.

(6.2) Théorème. *Soit f une application continue de* **R** *dans* **C**, *telle que* $f(0) = 1$.

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *f vérifie la relation* (6.1) *pour tout couple t, u de nombres réels ;*

(b) *il existe deux nombres réels* a, b *tels que l'on ait*

$$f(t) = \exp\,(at^2 + ibt)$$

pour tout nombre réel t.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

(6.3) LEMME. *Soit* H *une partie fermée de* $\mathbf{R}$ *possédant les propriétés suivantes :*

(a) 0 *appartient à* H;

(b) *si* t *appartient à* H, *alors* $-t$ *appartient à* H;

(c) $2t$ *appartient à* H *si et seulement si* t *appartient à* H;

(d) *si* $t+u$, $t-u$ *appartiennent à* H, *alors* t *appartient à* H.

Dans ces conditions on a, soit $H = \{0\}$, *soit* $H = \mathbf{R}$.

Démonstration du Lemme. Supposons que l'ensemble H possède un élément t_0 non nul. D'après (b), on pourra supposer t_0 positif. En vertu de (b) et de (c), il suffira de montrer que H contient l'intervalle $[0, t_0]$. Or il résulte de (c) que H contient tout nombre de la forme $t_0/2^n$ avec $n \geqq 0$. La propriété (d) entraîne alors que H contient aussi tout nombre de la forme $kt_0/2^n$ avec $0 \leqq k \leqq 2^n$. Puisque H est fermé, il contient l'intervalle $[0, t_0]$, ce qui achève la démonstration du Lemme.

Démonstration du théorème. Il suffit de démontrer l'implication (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons donc la propriété (a) vérifiée.

1) Plaçons-nous d'abord dans le cas où la fonction f est réelle et *positive*. La relation (6.1) devient alors

$$(f(t)f(u))^2 = f(t+u)f(t-u)\,.$$

Puisque f est continue et non nulle à l'origine, il existe un nombre réel t_0 non nul tel que l'on ait $f(t_0) > 0$. Désignons par a la constante réelle déterminée par la condition $f(t_0) = \exp\,(at_0^2)$, et posons, pour tout nombre réel t,

$$g(t) = \frac{f(t)}{\exp\,(at^2)}\,.$$

On a alors $g(0) = 1, g(t_0) = 1$; en outre la fonction g vérifie la même équation fonctionnelle que f:

$$(g(t)\,g(u))^2 = g(t+u)\,g(t-u)\,.$$

En particulier:

$$(g(u))^2 = g(u)\,g(-u)\,,$$
$$(g(t))^4 = g(2t)\,.$$

Il en résulte que l'ensemble fermé $H = \{t : g(t) = 1\}$ vérifie les hypothèses du Lemme (6.3).Comme d'autre part H contient le nombre réel non nul t_0, il coïncide avec $\mathbf{R}$, ce qui revient à dire que l'on a $f(t) = \exp(at^2)$ pour tout t.

2) Supposons ensuite $|f| = 1$. L'équation (6.1) devient alors

$$(f(t))^2 = f(t+u)f(t-u)\,. \tag{6.4}$$

Puisque la fonction f est continue et qu'elle prend la valeur 1 à l'origine, il existe un intervalle ouvert I, centré à l'origine, dans lequel f ne prend jamais la valeur -1. Pour tout élément t de cet intervalle, désignons par $\theta(t)$ la détermination principale de l'argument de $f(t)$. La fonction θ est alors continue, nulle à l'origine et vérifie l'équation $2\,\theta(t) = \theta(t+u) + \theta(t-u)$ pour tout couple t, u de nombres réels tels que $t + u$ et $t - u$ appartiennent à I.

En d'autres termes, θ est une fonction linéaire affine: il existe donc une constante réelle b telle que l'on ait $\theta(t) = bt$ (c'est-à-dire $f(t) = \exp(ibt)$) pour tout élément t de I. Si l'on pose

$$g(t) = \frac{f(t)}{\exp\,(ibt)}\,,$$

la fonction g vérifie, elle aussi, l'équation (6.4), donc en particulier l'équation $(g(t))^2 = g(2t)$. Puisque d'autre part elle est identiquement égale à 1 sur I, il en résulte qu'elle est égale à 1 partout. En d'autres termes, on a

$$f(t) = \exp\,(ibt)\,.$$

3) Plaçons-nous enfin dans le cas général. Puisque f vérifie l'équation fonctionnelle (6.1), il en est de même de la fonction réelle positive $|f|$. Celle-ci a donc (d'après 1)) la forme:

$$|f(t)| = \exp\,(at^2)\,.$$

On peut alors considérer le rapport $f/|f|$; c'est une fonction de module égal à 1, vérifiant la même équation fonctionnelle que f. Par conséquent on a, d'après 2),

$$\frac{f(t)}{|f(t)|} = \exp(ibt).$$

Les deux dernières relations montrent que f a la forme désirée.

Remarque. De façon plus générale, on peut montrer que, si f est une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle (6.1) (mais non assujettie à la condition $f(0) = 1$), alors f est, soit identiquement nulle, soit de la forme

$$f(t) = \exp(at^2 + ibt + ic), \tag{6.5}$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

En effet, si l'on suppose $f(0) = 0$, l'équation (6.1) (pour $t = u$) montre que f est identiquement nulle. Supposons donc $f(0) \neq 0$. La même équation (pour $t = u = 0$) fournit alors $|f(0)| = 1$. Par conséquent la fonction $f/f(0)$ vérifie encore l'équation fonctionnelle (6.1); puisqu'elle prend la valeur 1 à l'origine, le théorème précédent entraîne qu'elle est de la forme $\exp(at^2 + ibt)$. Si donc on pose $f(0) = \exp(ic)$, on obtient

$$f(t) = f(0)\exp(at^2 + ibt) = \exp(at^2 + ibt + ic).$$

On remarquera qu'inversement la fonction (6.5) vérifie l'équation fonctionnelle (6.1) quelles que soient les constantes réelles a, b, c; cependant elle n'est une fonction caractéristique que dans le cas où la constante a est négative et la constante c est un multiple entier de 2π.

Occupons-nous à présent des deux autres équations fonctionnelles rencontrées au paragraphe 1, à savoir

$$\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{c}))^c, \tag{6.6}$$

$$\varphi(t) = (\varphi(t/c))^c, \tag{6.7}$$

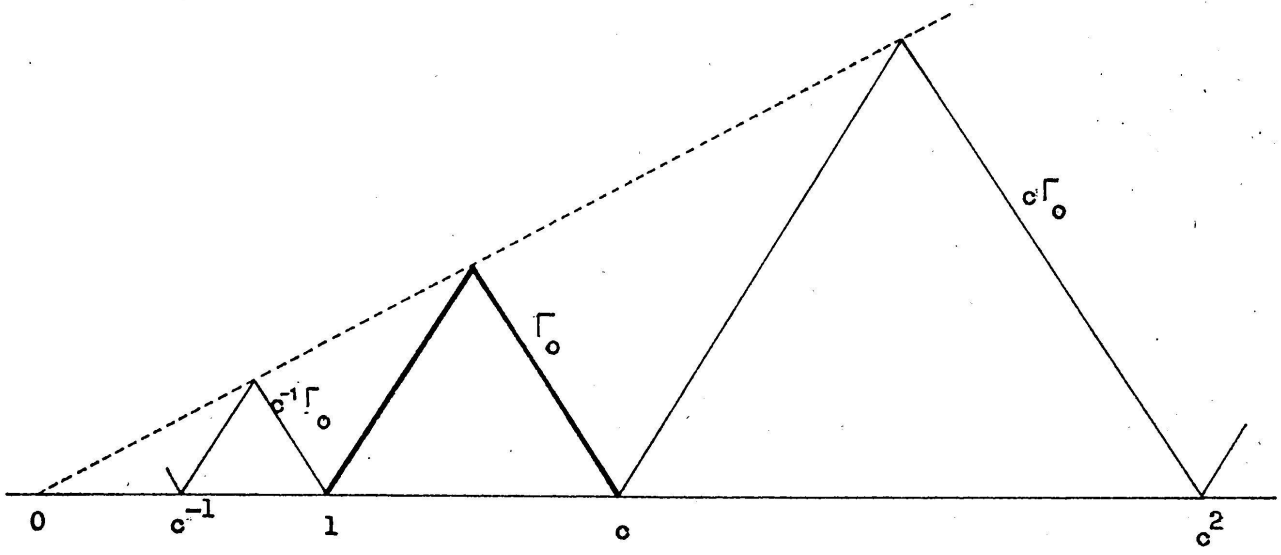
où c est une constante réelle, avec $c > 1$.

Dans chacune de ces deux équations la fonction inconnue φ sera supposée réelle, paire et strictement positive sur $\mathbf{R}$. En considérant la fonction $f(t) = \operatorname{Log}\varphi(\sqrt{|t|})$ (resp. $f(t) = \operatorname{Log}\varphi(t)$), l'équation (6.6) (resp. (6.7)) se réduit à

$$f(t) = cf(t/c). \tag{6.8}$$

Dans cette dernière équation la fonction inconnue f est réelle, paire, nulle à l'origine: il suffit donc de s'intéresser à sa restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$. Or, si l'on désigne par Γ le graphe de cette restriction, l'équa-

tion (6.8) exprime le fait que Γ est invariant par rapport à l'homothétie de centre 0 et de rapport c, c'est-à-dire que l'on a $c\,\Gamma = \Gamma$. Pour avoir une solution, il suffit donc de se donner un graphe *arbitraire* Γ_0 sur l'intervalle $]1, c]$ et de poser ensuite $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} c^n \Gamma_0$. La figure ci-dessous fournit un exemple.[1])



Il est évident qu'en choisissant convenablement Γ_0, on peut obtenir des solutions de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et tendant vers 0 à l'origine.

On peut d'ailleurs remarquer que chacune des équations (6.6), (6.7), (6.8) est de la forme $f = h \circ f \circ g^{-1}$ (où f est la fonction inconnue). Le résultat précédent est alors un cas particulier de la proposition suivante:

(6.9) PROPOSITION. *Soient T, U deux ensembles, g une bijection de T sur lui-même, h une bijection de U sur lui-même. Considérons l'équation fonctionnelle*

$$f = h \circ f \circ g^{-1}, \tag{6.10}$$

où la fonction inconnue f est une application de T dans U.

Supposons qu'il existe une partie T_0 de T telle que $(g^n(T_0))_{n \in \mathbf{Z}}$ constitue une partition de T. Dans ces conditions, pour toute application f_0 de T_0 dans U, il existe une application unique f de T dans U qui prolonge f_0 et qui vérifie l'équation fonctionnelle (6.10).

Démonstration. Unicité. Soit f une solution de (6.10). On a alors, pour tout entier n,

$$f = h^n \circ f \circ g^{-n}$$

En particulier, si f prolonge f_0, on a, pour tout élément t de $g^n(T_0)$,

---

[1]) L'idée de cette construction nous a été suggérée par Ph. Artzner.

$$f(t) = h^n[f_0(g^{-n}(t))].$$

Puisque $(g^n(T_0))_{n\in\mathbf{Z}}$ est une partition de T, la formule précédente détermine univoquement f sur l'ensemble T tout entier.

Existence. Désignons par Γ_0 le graphe de f_0 et par H la bijection de $T \times U$ sur lui-même définie par $H(t, u) = (g(t), h(u))$. L'ensemble

$$\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} H^n(\Gamma_0)$$

est alors le graphe d'une application f de T dans U. Puisque Γ contient Γ_0, f prolonge f_0. On a en outre $H(\Gamma) = \Gamma$, et cette relation montre que f vérifie l'équation fonctionnelle (6.10).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN, S. N. On a property characterizing the Gaussian Law. *Tr. Leningrad Politechn. Inst.*, *3* (1941), pp. 3-20.

[2] DARMOIS, G. Sur une propriété caractéristique de la loi de probabilité de Laplace. *C. R. Acad. Sc. Paris*, *232* (1951), 1999-2000.

[3] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. II, Wiley (1966).

[4] HENNEQUIN, P. L. et A. TORTRAT. *Théorie des probabilités et quelques applications.* Masson et Cie (1965).

[5] LUKACS, *Stochastic convergence.* Second edition, Academic Press (1975).

[6] SKITOVITCH, V. P. Linear forms in independent random variables and the normal distribution law. *Izvestia AN SSSR, Ser. Mat.*, *18* (1954), pp. 185-200.

(Reçu le 26 août 1977)

Aimé Fuchs
Giorgio Letta

Université de Strasbourg
Département de Mathématique
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg