II. DÉTERMINATION DES RACINES D'UN POLYNOME P DE H [X]

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

II. Détermination des racines d'un polynome P de $H[X]$.

Lemme 1. *Soient* $P(X) \in H[X]$ *et* $\lambda \in K$; *alors on a* $P(\lambda) = 0$ *si et seulement si* $X - \lambda$ *divise* $P(X)$ *dans* $H[X]$.

Démonstration. Evidente.

Lemme 2. *Soient* $P(X) \in H[X]$ *et* Δ *un polynôme irréductible de degré* 2 *dans* $K[X]$; *alors, si* Δ *est le polynôme caractéristique d'un quaternion* q, *on a l'alternative suivante :*

a) Δ *divise* P *et alors tous les conjugués* $\sigma q \sigma^{-1}$ *de* q *sont racines de* P,

b) Δ *ne divise pas* P *et alors au plus un conjugué* q' *de* q *est racine de* P.

Démonstration.

a) Si Δ divise P, il existe $P_1 \in H[X]$ tel que pour tout élément x de H, on ait $P(x) = P_1(x)\Delta(x)$ et le résultat 1 montre que tout quaternion conjugué de q est racine de P. Il y en a une infinité.

b) Si Δ ne divise pas P, alors on a $P = P_1\Delta + aX + b$ avec a et b dans H non simultanément nuls.

b$_1$) Si $a = 0$, pour tout quaternion q de polynôme caractéristique Δ, on a: $P(q) = b \neq 0$.

b$_2$) Si $a \neq 0$, il existe au plus une solution au problème, à savoir $-a^{-1}b$, et pour cela il faut et il suffit que Δ soit le polynôme caractéristique de $-a^{-1}b$. □

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer le résultat principal.

Théorème. *Soient* P *un polynôme de* $H[X]$ *et* q *un quaternion quelconque de* H. *Les conditions suivantes sont équivalentes :.*

(i) *Il existe un conjugué* q' *de* q *tel que* $P(q') = 0$.

(ii) *Le polynôme caractéristique de* q *divise* $n(P)$ *dans* $K[X]$.

(iii) *Le quaternion* q *est racine de* $n(P)$.

Démonstration. Le polynôme Δ_q est dans le centre $K[X]$ de l'anneau $H[X]$. On peut donc calculer modulo Δ_q dans $H[X]$ (i.e. modulo l'idéal bilatère $\Delta_q \,.\, H[X]$ de $H[X]$).

Si Δ_q divise P, le théorème est évident. Supposons donc que Δ_q ne divise pas P. On a $P(X) \equiv aX + b \bmod \Delta_q$ avec a, b dans H non simultanément nuls.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Si $P(q') = 0$, alors $a \neq 0$ et $q' = -a^{-1}b$. Or $n(P) = P\bar{P} \equiv (aX+b)(\bar{a}X+\bar{b}) \equiv n(a)\,\Delta_{-a^{-1}b} \bmod \Delta_q$.
Or $-a^{-1}b = q'$ et $\Delta_{q'} = \Delta_q$, donc $n(P) \equiv 0 \bmod \Delta_q$. Donc Δ_q divise $n(P)$ dans $K[X]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i): On a $n(P) \equiv (aX+b)(\bar{a}X+\bar{b}) \bmod \Delta_q$. Si $a = 0$, alors $n(P) \equiv n(b) \bmod \Delta_q$, donc $n(P)(q) = n(b) \neq 0$. Ceci est contraire à l'hypothèse. Donc $a \neq 0$. Par suite on a $n(P) \equiv n(a)\,\Delta_{-a^{-1}b} \bmod \Delta_q$. Comme $n(P)(q) = 0$, on a $\Delta_{-a^{-1}b}(q) = 0$; donc $\Delta_{-a^{-1}b} = \Delta_q$ et ainsi $P(-a^{-1}b) = 0$. $\square$

III. Quelques conséquences du théorème

Corollaire 1. *Supposons que H soit le corps des quaternions classiques sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Alors, pour tout polynôme P de $H[X]$ non constant, il existe un quaternion q de H tel que $P(q) = 0$.*

Démonstration. On peut supposer que P n'a pas de racines dans $\mathbf{R}$. Alors, d'après le lemme 1, $n(P)$ n'a pas de facteur du premier degré dans $\mathbf{R}[X]$.

Soit Δ un polynôme irréductible de degré 2 dans $\mathbf{R}[X]$, divisant $n(P)$. Un tel Δ existe puisque degré $n(P) = 2$ degré $P \geqslant 2$. Or on sait qu'il existe un quaternion q tel que $\Delta_q = \Delta$ et le théorème nous dit qu'il existe un conjugué q' de q tel que $P(q') = 0$. $\square$

C'est le résultat (i) de Niven.

Corollaire 2. *Soit H un corps de quaternions généralisés de centre K. Un polynôme P de $H[X]$ admet une infinité de racines si et seulement s'il existe un polynôme irréductible Δ de degré 2 de $K[X]$ et un quaternion q tel que $\Delta = \Delta_q$ et Δ divise P.*

La démonstration est une conséquence triviale du lemme 2 et du théorème. Si $K = \mathbf{R}$, tout polynôme irréductible de degré 2 est le polynôme caractéristique d'un quaternion q, d'où le résultat (ii) de Niven.

Corollaire 3. *Soit H un corps de quaternions généralisés de centre K. Si le polynôme P de $H[X]$ n'a qu'un nombre fini de racines, celui-ci est inférieur ou égal au degré de P.*