Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS SUR LES MODULES BILINÉAIRES
Autor: Revoy, Philippe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51059

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

OPÉRATIONS SUR LES MODULES BILINÉAIRES

par Philippe REVOY

Le produit tensoriel d'applications quadratiques présente un caractère particulier souligné dans [8] et [9]. Nous souhaitons reprendre ici cette question dans un cadre général et montrer les analogies avec le cas des formes alternées. On peut ensuite définir dans les deux cas des opérations λ et σ.

Dans les deux premières parties, je redonne les constructions classiques dans le cadre des modules bilinéaires pour définir les groupes et anneaux universels des différentes catégories de modules bilinéaires.

Dans la troisième partie, je construis les puissances extérieures et symétriques pour les modules quadratiques et les modules alternés; il en découle pour les anneaux vus précédemment, l'existence d'une structure de pré-λ-anneau. Dans la dernière partie, on aborde la question de savoir si ce sont des λ-anneaux ([10]). Un appendice ébauche la construction d'un module discriminant, qui possède une variante plus fine pour les formes quadratiques, l'invariant d'Arf.

Nous nous plaçons constamment dans le cadre affine, bien qu'il soit clair qu'une démonstration du fait que nous avons affaire à des λ-anneaux nécessite probablement la considération des schémas ([10] pour le cas des modules projectifs de type fini). Le lecteur pourra consulter « Grothendieck- und Wittrings von nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearformen », *S. B. Heidelberger Acad. Wiss.* 1969/1970, p. 93-157 de M. Knebusch dont nous nous sommes inspirés dans ce travail.

Une partie de 3.2 est tirée de *Modules quadratiques* de A. Micali et l'auteur, à paraître dans les mémoires de la société mathématique de France. Cet article, qui se veut de synthèse, emprunte, pour les deux premières parties à plusieurs publications, [1], [7], [8] et [9] par exemple et à d'autres qui n'ont pas été citées vu le nombre de travaux consacrés à ce sujet ces dernières années.

Dans la suite, R désigne un anneau commutatif à élément unité et ε vaut $+1$ ou -1.

1. Généralités

1.1. *Définitions*

1) Un module *bilinéaire ε-symétrique* est un triple (M, φ, N) où M et N sont des R-modules et φ une application bilinéaire de $M \times M$ dans N telle que $\varphi(y, x) = \varepsilon\, \varphi(x, y)$, quels que soient x et y dans M. Si $\varepsilon = +1$, φ est symétrique; sinon φ est antisymétrique.

2) Un module *alterné* est un triple (M, φ, N) où $\varphi : M \times M \to N$ est bilinéaire et vérifie $\varphi(x, x) = 0$ pour tout x de M.

3) Un module *quadratique* est un triple (M, q, N) où q est une application de M dans N vérifiant:

(i) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour tout couple (x, λ) de $M \times R$;

(ii) $(x, y) \to q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une application bilinéaire (symétrique) qu'on note φ_q de $M \times M$ dans N.

1.2. *Remarques*

(1) Les objets (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) définis en 1.1 seront aussi notés (M, φ) ou φ (resp. (M, q) ou q) suivant le contexte et appelés applications bilinéaires (resp. quadratiques). Si M et N sont fixés, les applications φ (ou q) forment un R-module pour la somme des applications et la multiplication par un scalaire. Si $N = R$, ou plus généralement (suivant une idée de T. Kanzaki), si N est un R-module projectif de type fini et de rang 1, on parlera de formes bilinéaires ou de formes quadratiques.

2) Tout module alterné est antisymétrique. Inversement, si l'homothétie de rapport 2 dans N est inversible (ou si 2 est inversible dans R), alternée et antisymétrique sont synonymes. Si l'homothétie de rapport 2 est inversible dans N (ou dans R), il y a une bijection naturelle entre applications quadratiques et applications bilinéaires symétriques par $q \to \varphi_q$ et $\varphi \to q_\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\, \varphi(x, x)$.

Si par contre $2 = 0$ dans N (ou dans R), q quadratique implique φ_q alternée car $\varphi_q(x, x) = 2q(x)$. De plus φ alternée entraîne φ symétrique et φ ε-symétrique ne dépend pas de ε.

1.3. *Somme orthogonale*

La somme orthogonale de deux objets (M, φ, N) et (M', φ', N') peut se définir même si N et N' sont distincts mais nous supposerons ici toujours $N = N'$: $(M, \varphi, N) \perp (M', \varphi', N')$ c'est le module bilinéaire défini sur $M \oplus M'$ et à valeurs dans $N\,(= N')$ dont la forme $\varphi \perp \varphi'$ est donnée par la formule:

$$\varphi \perp \varphi'\big((x, x'), (y, y')\big) = \varphi(x, y) + \varphi'(x', y')\,.$$

On définit de la même façon la somme orthogonale de deux modules quadratiques.

1.4 *Morphismes*

Les modules bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques, resp. alternés, resp. quadratiques) forment une catégorie. Nous noterons Bil_N la sous-catégorie formée des objets (M, φ, N), N fixé, où les morphismes sont les applications linéaires $u : M \to M'$ telles que le triangle

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "u \times u"'] & \\ & N \\ M' \times M' \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

La somme orthogonale est alors un foncteur de $\mathrm{Bil}_N \times \mathrm{Bil}_N$ dans Bil_N, associatif et commutatif à isomorphisme près. On définit de façon analogue les catégories Sym_N, ASym_N, Alt_N, Quad_N ... La définition de la somme orthogonale de deux modules quadratiques montre que

$$\varphi_{q \perp q'} \cong \varphi_q \perp \varphi_{q'} \tag{1}$$

ce qui s'écrit encore en disant que le carré suivant est commutatif à isomorphisme près:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Quad}_N \times \mathrm{Quad}_N \arrow[r, "\perp"] \arrow[d, "\varphi \times \varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \mathrm{Quad}_N \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Bil}_N \times \mathrm{Bil}_N \arrow[r] & \mathrm{Bil}_N \end{tikzcd}$$

1.5. *Formes non dégénérées*

Soit (M, φ, R) une forme bilinéaire. A φ sont associées deux applications linéaires de M dans son dual $M^* = \mathrm{Hom}(M, R)$, s_φ et d_φ définies par $s_\varphi(x)(y) = \varphi(x, y)$ et $d_\varphi(x)(y) = \varphi(y, x)$. Comme φ est ε-symétrique, $d_\varphi = \varepsilon s_\varphi$. On dira que φ (où (M, φ)) est non dégénérée si d_φ, et donc s_φ, est un isomorphisme de R-modules. Cela implique, en transposant d_φ, que M est *réflexif*. Dans le cas d'une forme quadratique, on dira que q est non dégénérée si la forme bilinéaire symétrique associée φ_q l'est.

Une généralisation peut se faire aux cas d'applications bilinéaires (ou quadratiques), le cas le plus intéressant étant celui où N est projectif de type fini et de rang 1 (on notera que dans ce cas un R-module projectif de type fini M est *N-réflexif* en ce sens que l'application naturelle $C_{M,N} : M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, N), N)$ est un isomorphisme de modules). On dira donc, dans ce cas, que (M, φ, N) est non dégénéré si $s_\varphi : M \to \mathrm{Hom}(M, N)$ est un isomorphisme de R-modules, et de même dans le cas quadratique. Ainsi par exemple si P est projectif de type fini et de rang 2, le triple $(P, \Lambda, \Lambda^2 P)$ où $\Lambda(x, y) = x \wedge y$ est un module alterné non dégénéré.

Notons les propriétés suivantes: la somme orthogonale de deux formes non dégénérées est non dégénérée; un lemme classique ([1]) dit que si $u : (M, \varphi, N) \to (M', \varphi', N)$ est un morphisme de formes bilinéaires et si φ est non dégénérée, u identifie M à un facteur direct de M' et il existe un sous-module M'' de M' tel qu'en désignant par φ'' la restriction de φ' à M'', on ait un isomorphisme:

$$(M', \varphi') \cong (M, \varphi) \perp (M'', \varphi'') .$$

1.6. *Extension des scalaires*

Soit $R \to S$ un homomorphisme d'anneaux et (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) un module bilinéaire (resp. quadratique). Il existe sur le couple de S-modules $(M \otimes_R S, N \otimes_R S)$ une application bilinéaire φ_S (resp. quadratique q_S) unique telle que $\varphi_S(x \otimes s, y \otimes s') = \varphi(x, x') \otimes ss'$ (resp. $q_S(x \otimes s) = q(x) \otimes s^2$). Dans le cas quadratique, on a $\varphi_{q_S} \cong (\varphi_q)_S$. L'extension des scalaires ainsi définie commute à la somme orthogonale.

Si le module bilinéaire φ (ou q) est non dégénéré, il en est de même de φ_S (ou q_S) quelle que soit $R \to S$. En sens inverse, si M est projectif de type fini, la forme φ (ou q) est non dégénérée si et seulement si toutes ses localisées (extension aux anneaux $R_{\underline{m}}$, $\underline{m}$ maximal, ou $R_{\underline{p}}$, $\underline{p}$ premier) sont non dégénérées.

1.7. *Espaces hyperboliques*

Soient M et N deux modules et $h(M, N) = M \oplus \mathrm{Hom}(M, N)$: ce dernier possède une structure bilinéaire naturelle, ε-symétrique ou quadratique obtenue en posant

$$\begin{cases} {}_{\varepsilon}\varphi((x, f), (y, g)) = f(y) + \varepsilon g(x) \\ q(x, f) = f(x) \end{cases}$$

où $x, y \in M$, $f, g \in \mathrm{Hom}(M, N)$. On a $\varphi_q = {}_1\varphi$ et ${}_{-1}\varphi$ est alternée.

Ce module bilinéaire (ou quadratique) s'appelle l'espace hyperbolique du couple (M, N), ou de M, si N est fixé. On a l'isomorphisme canonique suivant: $h(M \oplus M', N) \cong h(M, N) \perp h(M', N)$. Si $\alpha : M_1 \to M_2$ est un isomorphisme de modules, $h(\alpha) : h(M_1, N) \to h(M_2, N)$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & t_\alpha - 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de modules bilinéaires. Ainsi $h(\,.\,, N)$ est un foncteur covariant de la catégorie des R-modules, avec pour morphismes les isomorphismes, dans la catégorie Bil_N (ou Quad_N), qui commute à la somme, directe pour les R-modules, orthogonale pour les modules bilinéaires ou quadratiques.

La non dégénérescence de $h(M, N)$ est liée à la réflexivité de M; soit $C_{M,N} : M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, N), N)$ l'application canonique qui à m associe $f \to \hat{m}(f) = f(m)$. La matrice de $s_\varphi : M \oplus \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, N), N)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathrm{Hom}(M,N)} \\ \varepsilon C_{M,N} & 0 \end{pmatrix}$ si bien que $h(M, N)$ est non dégénéré si et seulement si M est N-réflexif, c'est-à-dire si $C_{M,N}$ est un isomorphisme. Si on suppose que $M \in \mathscr{P}(R)$ et que N est projectif de type fini et de rang 1, alors $h(M, N)$ est non dégénéré.

1.8. *Espaces métaboliques*

Rappelons que dans un module bilinéaire (M, φ, N), deux éléments x et y de M sont dits *orthogonaux* si $\varphi(x, y) = 0$. Si M_1 est un sous-module M, les éléments de M orthogonaux à tous les éléments de M_1 forment un sous-module noté $M_1^{\perp}$, l'*orthogonal* de M_1. Le sous-module M_1 de M est dit *totalement isotrope* s'il est contenu dans son orthogonal (dans le cas d'un module quadratique, on rajoute la condition $q(x) = 0$ quel que soit x dans M_1).

Définition. Un module bilinéaire (M, φ, N) non dégénéré où N est projectif de type fini et de rang 1 est *métabolique* s'il existe un sous-module M_1 de M totalement isotrope et égal à son orthogonal.

Dans le cas quadratique, on définira de même un module métabolique. Un module hyperbolique $h(M, N)$ est métabolique s'il est non dégénéré: il suffit de prendre pour M_1, M ou bien $\mathrm{Hom}(M, N)$. Dans le cas des modules quadratiques, on a la réciproque bien connue: modules quadratiques métaboliques et hyperboliques coïncident.

Dans le cas bilinéaire, symétrique par exemple, soit R^2 muni de la forme bilinéaire $\varphi((x, y), (x', y')) = xy' + x'y + yy'$. C'est un module métabolique avec $M_1 = R(1, 0) = \mathrm{Re}_1$ et soit $e_2 = (0, 1)$. Pour que (R^2, φ) soit hyperbolique, il est nécessaire et suffisant qu'il existe $z = xe_1 + ye_2$ tel que $\varphi(z, z) = 0$ et tel que (e_1, z) soit une base de R^2, c'est-à-dire $y \in U(R)$ ou encore $y = 1$. Or, $\varphi(xe_1 + e_2, xe_1 + e_2) = 1 + 2x$ ne peut être nul que si 2 est inversible dans R. Le module (R^2, φ) est donc hyperbolique si et seulement si $2 \in U(R)$. De façon générale, si 2 est inversible dans R, les notions de modules métaboliques et de modules hyperboliques sont les mêmes.

Sans faire d'hypothèse sur 2, considérons un module métabolique (M, φ, N) et soit P un sous-module de M tel que $P^\perp = P$. Alors en tant que R-module, M s'identifie à $P \oplus \mathrm{Hom}(P, N)$ et l'application linéaire associée à φ de $P \oplus \mathrm{Hom}(P, N)$ dans $\mathrm{Hom}(P, N) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, N), N)$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathrm{Hom}(P, N)} \\ \varepsilon C_{P, N} & \alpha \end{pmatrix}$ où $C_{P, N}$ est l'application canonique de P dans le N-bidual de P. On voit alors que M est hyperbolique si et seulement si il existe un supplémentaire P' de P isomorphe à $\mathrm{Hom}(P, N)$ tel que l'application α' obtenue comme α est l'application nulle. Or, un calcul facile montre que la forme $(x, y) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(x)(y)$ est ε-symétrique et que $\bar{\alpha}'$ et $\bar{\alpha}$ diffère par une forme $T(\beta) = \beta + \varepsilon \tilde{\beta}$ où $\tilde{\beta}(x, y) = \beta(y, x)$, de sorte que M est métabolique si et seulement si $\bar{\alpha}$ est de la forme $T(\beta)$. Il est alors facile de voir que c'est toujours le cas si 2 est inversible dans R.

1.9. *Groupes universels*

En nous restreignant à des sous-catégories pleines convenables de modules bilinéaires (ou quadratiques), nous allons définir divers groupes universels. Soit $N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$; on appelle $\underline{\mathrm{Symbil}}(N)$ (resp. $\underline{\mathrm{As}}(N)$, $\underline{\mathrm{Alt}}(N)$,

Quad (N)) la sous-catégorie formée des modules bilinéaires symétriques (M, φ, N) (resp. antisymétriques, alternés, quadratiques) non dégénérés dont le module sous-jacent M est projectif de type fini. Le formalisme de la K-théorie algébrique ([1], Ch. 1) est adapté à ces situations. Ainsi à l'aide de la somme orthogonale on obtient des groupes abéliens qu'on note $K_0^{\text{Symbil}}(N)$, $K_0^{\text{As}}(N)$, $K_0^{\text{Alt}}(N)$ $K_0^{Q}(N)$: ce sont les groupes universels (ou de Groethendieck) pour les applications f de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de la catégorie correspondante dans les groupes abéliens G tels que $f(M \perp M') = f(M) + f(M')$ dans G.

Soit alors $K_0(R)$ le groupe de Groethendieck de la catégorie $\underline{P}(R)$ des R-modules projectifs de type fini et notons $[M]$ la classe dans ce groupe du module M. L'application f qui au module bilinéaire M associe $[M]$ (foncteur oubli) induit d'après le caractère universel des groupes définis ci-dessus des homomorphismes de groupes abéliens $K_0^{\cdot}(F) : K_0^{\cdot}(N) \to K_0(R)$ (le point . remplaçant Symbil, As, Alt ou Q). Inversement, l'isomorphisme naturel $h(P_1, N) \perp h(P_2, N) \cong h(P_1 \oplus P_2, N)$ pour P_1 et P_2 dans $\underline{P}(R)$ induit des homomorphismes $K_0^{\cdot}(H) : K_0(R) \to K_0^{\cdot}(N)$. Dans le cas quadratique, on appelle groupe de Witt *des types de formes quadratiques* de N, le conoyau de $K_0^{Q}(H)$.

Dans les autres cas, on peut définir deux groupes de Witt selon que l'on considère comme triviaux les modules hyperboliques ou plus généralement les modules métaboliques. Mais, en fait, les deux groupes obtenus sont canoniquement isomorphes.

Ces groupes de Groethendieck et de Witt commutent à l'extension des scalaires du fait de la propriété analogue de la somme orthogonale. Il en est de même pour les homomorphismes $K_0^{\cdot}(F)$ et $K_0^{\cdot}(H)$.

Fixons la notation suivante: si (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) est un module bilinéaire (resp. quadratique), on notera $[(M, \varphi)]$ ou $[\varphi]$ (resp. $[(M, q)]$ ou $[q]$) son image dans $K_0^{\cdot}(N)$. On abrègera K_0^{Symbil} en K_0^{SB}.

2. Structures multiplicatives

Le groupe de Groethendieck $K_0(R)$ est muni d'une structure d'anneau (commutatif et unitaire) par le produit tensoriel. Nous allons voir que pour les modules bilinéaires et quadratiques nous avons une situation analogue qui enrichit les groupes $K_0^{\cdot}(N)$ de structures supplémentaires.

2.1. *Produit tensoriel de modules bilinéaires*

Soient (M, φ, N) et (M', φ', N') deux modules bilinéaires respectivement ε et ε'-symétriques. L'application $u : M \times M' \times M \times M'$ dans $N \otimes N'$ définie par $u(x, y, x', y') = \varphi(x, y) \otimes \varphi'(x', y')$ est linéaire par rapport à chaque argument et induit une application bilinéaire sur le R-module $M \otimes M'$ à valeurs dans $N \otimes N'$ qui est $\varepsilon\varepsilon'$-symétrique. Ce nouveau module bilinéaire noté $(M \otimes M', \varphi \otimes \varphi', N \otimes N')$ est appelé produit tensoriel de (M, φ, N) et (M', φ', N'); ce produit est manifestement commutatif et associatif à isomorphisme près; il est aussi, comme le produit tensoriel de modules vis-à-vis de la somme directe, distributif vis-à-vis de la somme orthogonale de modules bilinéaires.

Si $\varepsilon\varepsilon' = -1$, l'un des deux modules est antisymétrique, par exemple (M, φ). Supposons-le alterné; alors $(M \otimes M', \varphi \otimes \varphi')$ est alterné: en effet il est clair que $\varphi \otimes \varphi'$ est nul sur les couples $(x_i \otimes x_i', x_i \otimes x_i')$ où $x_i \in M$, $x_i' \in M'$. Comme $\varphi \otimes \varphi'$ est antisymétrique, on en déduit que $\varphi \otimes \varphi'(z, z) = 0$ pour tout $z = \sum_i x_i \otimes x_i'$ de $M \otimes M'$.

2.2. *Cas d'un module quadratique et d'un module bilinéaire*

Supposons maintenant donnés un module quadratique (M, q, N) et un module bilinéaire *symétrique* (M', φ', N'). On a alors la

PROPOSITION 2.2.1. *Il existe un module quadratique unique* $(M \otimes M', \bar{q} = q \otimes \varphi', N \otimes N')$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\text{(i)} \quad \bar{q}(x \otimes x') = q(x) \otimes \varphi'(x', x')$$

$$\text{(ii)} \quad \varphi\bar{q} \cong \varphi_q \otimes \varphi'.$$

La proposition est due à C. H. Sah ([8], [9]). L'unicité est claire car (i) et (ii) définissent $\bar{q} = q \otimes \varphi'$ sur toute somme $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i'$ comme

$$\bar{q}(z) = \sum_{i=1}^{n} q \otimes \varphi'(x_i \otimes x_i') + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_q \otimes \varphi'(x_i \otimes x_i', x_j \otimes x_j').$$

L'existence se montre aisément si M et M' sont libres et, dans le cas général, on présente M et M' comme quotients de modules libres.

Si maintenant (M, q, N) et (M', q', N') sont deux modules quadratiques, on peut définir sur $M \otimes M'$ deux applications quadratiques à valeurs dans $N \otimes N'$ à l'aide de $(q, \varphi_q,)$ d'une part, (φ_q, q') d'autre part. On a alors $\varphi_{q \otimes \varphi_{q'}} = \varphi_q \otimes \varphi_{q'} = \varphi_{\varphi_{q \otimes q'}}$ et pour tout couple (x, x')

de $M \times M'$, $q \otimes \varphi_{q'}\ (x \otimes x') = q(x) \otimes \varphi_{q'}\ (x', x') = 2q(x) \otimes q'(x') = \varphi_q(x, x) \otimes q'(x') = \varphi_q \otimes q'(x \otimes x')$, si bien que les deux *modules quadratiques coïncident.*

Les propriétés signalées en 2.1 (associativité, commutativité et distributivité par rapport à la somme orthogonale) sont encore valables. On peut encore noter que le produit tensoriel commute à l'extension des scalaires.

Supposons maintenant les modules N et N' dans $\underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$; on a alors la

PROPOSITION 2.2.2. *Le produit tensoriel de deux modules bilinéaires ε_i-symétriques non dégénérés* (resp. *d'un module quadratique et d'un module bilinéaire symétrique non dégénérés*) *est un module bilinéaire* (resp. *quadratique*) *non dégénéré.*

En effet, si $s_\varphi : M \to \mathrm{Hom}\,(M, N)$ et $s_{\varphi'} : M' \to \mathrm{Hom}\,(M', N')$ sont des isomorphismes de R-modules, alors $s_{\varphi \otimes \varphi'}$, qui s'obtient en composant $s_\varphi \otimes s_{\varphi'} : M \otimes M' \to \mathrm{Hom}\,(M, N) \otimes \mathrm{Hom}\,(M', N')$ avec l'isomorphisme naturel entre ce dernier module et $\mathrm{Hom}\,(M \otimes M', N \otimes N')$ est un isomorphisme.

2.3. *Structures d'anneaux et de modules*

La proposition 2.2.2 et les résultats de 2.1 montrent que le produit tensoriel induit sur $K_0^{SB}(R)$ une structure d'anneau commutatif: comme tout élément de ce groupe est différence d'éléments $[\varphi]$, il suffit de définir $[\varphi_1] \times [\varphi_2] = [\varphi_1 \otimes \varphi_2]$. Cet anneau est unitaire d'élément unité $\langle 1 \rangle$: $R \times R \to R$ défini par $\langle 1 \rangle (r, s) = rs$.

Comme le produit tensoriel d'une forme symétrique (resp. antisymétrique, alternée, quadratique) à valeurs dans $N \in \underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$ par une forme symétrique à valeurs dans R est une forme de même nature que la première et à valeurs dans N, les propriétés d'associativité et de distributivité vues en 2.1 et 2.2 montrent que les groupes $K_0^{\cdot}(N)$ sont de façon naturelle des $K_0^{SB}(R)$-modules unitaires.

De plus le produit tensoriel induit, pour N et N' dans $\underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$, une application naturelle de $K_0^{SB}(N) \times K_0^{SB}(N')$ dans $K_0^{SB}(N \otimes N')$ qui est biadditive et $K_0^{SB}(R)$-linéaire par rapport à chaque variable. On obtient ainsi un homomorphisme naturel ${}_N\otimes_{N'} : K_0^{SB}(N) \otimes_{K_0^{SB}(R)} K_0^{SB}(N') \to K_0^{SB}(N \otimes N')$. On peut énoncer des résultats analogues pour les autres groupes $K_0^{\cdot}(N)$ qui sont des $K_0^{SB}(R)$-modules. Retenons les deux cas particuliers suivants:

Si φ et φ' sont deux formes alternées à valeurs scalaires, $\varphi \otimes \varphi'$ est une forme symétrique. On a ici une *application*

$K_0^{SB}(R)$-*bilinéaire symétrique de* $K_0^{\mathrm{Alt}}(R) \times K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ dans $K_0^{SB}(R)$.

Dans le cas quadratique, l'application $q \to \varphi_q$ induit une application $K_0^{SB}(R)$-linéaire de $K_0^Q(N)$ dans $K_0^{SB}(N)$ qu'on notera b_N (bilinéarisée). Si N et N' sont dans $\underline{\mathrm{Pic}}(R)$, on a d'après 2.2 les formules suivantes dans $K_0^Q(N \otimes N')$ et $K_0^{SB}(N \otimes N')$:

$$(1)\ q \otimes q' = b_N(q) \otimes q' = q \otimes b_{N'}(q')$$
$$(2)\ b_N(q \otimes q') = b_N(q) \otimes b_N(q').$$

2.4. *Remarques*

(i) On peut encore définir un autre anneau commutatif et unitaire associé aux modules bilinéaires symétriques : à savoir $\overline{K_0^{SB}(R)} = \bigoplus_{N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)} K_0^{SB}(N)$, le produit étant défini à l'aide des applications ${}_N\otimes_{N'}$ de 2.3. C'est une $K_0^{SB}(R)$-algèbre commutative graduée par le groupe Pic (R). Les sommes directes $\overline{K_0^{\cdot}(R)} = \bigoplus_{N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)} K_0^{\cdot}(N)$ où . désigne As, Alt ou Q sont des $\overline{K_0^{SB}(R)}$-modules gradués sur Pic (R).

(ii) Si $N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$, $N \otimes N^*$ s'identifie canoniquement à R d'où un homomorphisme naturel $K_0^{SB}(N) \otimes_{K_0^{SB}(R)} K_0^{SB}(N^*) \to K_0^{SB}(R)$. On a aussi un isomorphisme naturel entre $K_0^{SB}(R)$ et $K_0^{SB}(N \otimes N)$ par $(M, \varphi, R) \to (M \otimes N, \varphi \otimes 1_{N \otimes N}, N \otimes N)$.

(iii) Si 2 est inversible dans R, b_N est un isomorphisme de $K_0^{SB}(R)$-modules; la structure d'anneau de $K_0^{SB}(R)$ se transporte à $K_0^Q(R)$. Dans le cas général, la structure multiplicative de $K_0^Q(R)$ ne présente d'intérêt que du fait des relations (1) et (2) de 2.3.

(iv) En ce qui concerne le foncteur oubli, $K_0(F) : K_0^{SB}(R) \to K_0(R)$ est un homomorphisme d'anneaux. Tout ce qui a été vu en 2.2, 2.3 et 2.4 se comporte bien par extension des scalaires.

(v) Le produit tensoriel d'un espace hyperbolique par un autre module (symétrique, quadratique ou alterné) est un espace hyperbolique, ce qui montre que le sous-groupe engendré par les espaces hyperboliques est un idéal (ou un sous $K_0^{SB}(R)$-module suivant les cas).

2.5. *Formes alternées et formes quadratiques*

Les deux remarques de 2.3 nous conduisent aux définitions suivantes: $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ sont deux anneaux commutatifs $Z/(2)$-gradués dont les composantes homogènes de degré 0 sont $K_0^{SB}(R)$ pour chacun d'eux et les composantes de degré 1 respectivement $L_{\mathrm{Alt}}(R)_1 = K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)_1 = K_0^Q(R)$. Le produit dans $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ est défini à l'aide de l'application de $K_0^{\mathrm{Alt}}(R) \times K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ dans $K_0^{SB}(R)$ vue en 2.3. Celui de $L_Q(R)$ est défini par la formule:

$$(b, q)(b', q') = (bb' + \varphi_q \cdot \varphi_{q'}, b \cdot q' + b' \cdot q).$$

L'intérêt de ces deux anneaux est qu'ils sont le cadre naturel des opérations λ et σ sur les formes bilinéaires symétriques, alternées et quadratiques que nous verrons en 3.

Si 2 est inversible dans R, la bilinéarisation est un isomorphisme de K_0^Q sur K_0^{SB} et $L_Q = K_0^{SB}(R)[x]$ avec $x^2 = 1$. Les anneaux L_{Alt} et L_Q jouissent des propriétés fonctorielles usuelles vis-à-vis de l'extension des scalaires.

3. Puissances extérieures et puissances symétriques

Les puissances extérieures sont un outil important de l'algèbre linéaire. Nous souhaitons montrer ici que dans le cadre des modules bilinéaires ou quadratiques des constructions semblables peuvent être faites. Cela permettra de munir les anneaux rencontrés dans la partie précédente d'opérations λ et σ.

3.1. *Puissances extérieures de modules bilinéaires*

Soit (M, φ, N) un R-module bilinéaire; si $N = A$, la définition des puissances extérieures de φ est bien connue ([3], [8]). Dans le cas général, définissons l'application de $M \times M \times \ldots \times M$, $2p$ fois, dans l'algèbre symétrique $S(N)$ du R-module N qui à $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$ associe le déterminant de la matrice des $\varphi(x_i, y_j)$, $\varphi(x_i, y_j) \in N = S^1(N)$, sous R-module de $S(N)$. C'est une application multilinéaire par rapport aux x_i et y_j et alternée vis-à-vis des x_i d'un côté et des y_j de l'autre. On obtient ainsi un module bilinéaire $(\Lambda^p M, \Lambda^p \varphi, S^p N)$, la puissance extérieure $p^{\text{ième}}$ de (M, φ, N). Si φ est ε-symétrique, $\Lambda^p \varphi$ est ε^p-symétrique. Si φ est non

seulement antisymétrique mais alternée, $\Lambda^{2p}\varphi$ est symétrique mais non alternée en général (car 0 si 2 était inversible...). Cependant $\Lambda^{2q+1}\varphi$ est alternée: en effet c'est un module antisymétrique et si $z = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{2q+1}$, $\Lambda^{2q+1}\varphi\,(z, z)$ est le déterminant de la matrice alternée d'ordre impair formé des $\varphi\,(x_i, x_j)$ et donc vaut 0. Le même raisonnement que celui qui a été fait en 2.1 pour le produit tensoriel montre que $\Lambda^{2q+1}\varphi$ est alternée.

3.2. *Puissances extérieures de modules quadratiques*

Si 2 est inversible dans R; modules quadratiques et modules bilinéaires symétriques sont identiques. Ainsi si (M, q, N) est un module quadratique sa $p^{\text{ième}}$ puissance extérieure est $(\Lambda^p M, \Lambda^p q, S^p N)$ où $\Lambda^p q\,(x) = \dfrac{1}{2}\,\Lambda^p\varphi_q(x,x)$ et $\varphi_{\Lambda^p q} = \Lambda^p\varphi_q$. Par contre si $2 = 0$ dans R, φ_q est alternée, de sorte qu'il est impossible de définir $\Lambda^{2h}q$ convenablement car $\Lambda^{2h}\varphi_q$ est symétrique mais non alternée en général et donc on ne pourrait pas avoir $\varphi_{\Lambda^{2h}_q} = \Lambda^{2h}\varphi_q$. Cependant, comme pour les formes alternées en 3.1, nous allons voir qu'il est possible de définir raisonnablement $\Lambda^{2h+1}q$.

LEMME 3.2.1. *Soient* $A_n = \mathbf{Z}\,[X_{ij}]$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ *et* Δ_n *le déterminant*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{12} & 2X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ X_{13} & X_{23} & \cdots & X_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & 2X_{nn} \end{vmatrix}$$

Si n *est impair, il existe un élément* P_n *de* A_n *tel que* $\Delta_n = 2P_n$.

En réduisant modulo 2, on voit que Δ_n est le déterminant d'une matrice alternée d'ordre impair, donc 0 modulo 2. Le polynôme P_n est évidemment unique. Soient maintenant (M, q, N) un module quadratique et n un entier impair. On a la

PROPOSITION 3.2.2. *Il existe un module quadratique* $(\Lambda^n M, \bar{q}, S^n N)$ *et un seul tel que*

(i) $\varphi_{\bar{q}} = \Lambda^n \varphi_q$

(ii) $\bar{q}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = P_n(a_{ij})$ où $a_{ii} = q(x_i)$ et $a_{ij} = \varphi_q(x_i, x_j)$ si $i < j$.

Dorénavant $\bar{q}$ sera notée $\Lambda^n q$; l'unicité de $\Lambda^n q$ est claire car les conditions (i) et (ii) permettent de calculer $\Lambda^n q$ sur tout élément de $\Lambda^n M$.

Pour montrer l'existence de $\Lambda^n q$, considérons la suite exacte $0 \to L \to R^{(M)} \to M \to 0$ où l'on note $(e_x)_{x \in M}$ la base canonique de $R^{(M)}$ supposée totalement ordonnée. Définissons sur $\Lambda^n R^{(M)}$ une application quadratique q' à valeurs dans $S^n(M)$ par

$$q'(e_{x_1} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) = P_n(q(x_i), \varphi_q(x_i, x_j)), \quad i < j,$$
$$\varphi'(e_{x_1} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}, e_{y_1} \wedge \ldots \wedge e_{y_n}) = \text{dét}(\varphi_q(x_i, y_j)), 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

et

$$x_1 \leqslant \ldots < x_n, y_1 < \ldots < y_n .$$

Dans la suite exacte $0 \to L' \to \Lambda^n R^{(M)} \to \Lambda^n M \to 0$, le sous-module L' est engendré par les éléments de la forme

$$(e_{ax} - ae_x) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}$$

et

$$(e_{x+y} - e_x - e_y) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}$$

où $x, y, x_2, \ldots, x_n$ sont dans M et a dans R. Il est facile de vérifier que L' est contenu dans le noyau de q' (i.e. $\{ t \mid t \in \Lambda^n R^{(M)}, q'(t) = 0$ et $\varphi_q'(t, z) = 0, \forall z \in R^{(M)} \}$). Par exemple

$$\begin{aligned} q'((e_{ax} - ae_x) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) \\ = q'(e_{ax} \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) + a^2 q(e_x \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) \\ - a\varphi'(e_{ax} \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}, e_x \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) = 0 \end{aligned}$$

et, de même

$$\varphi'((e_{ax} - ae_x) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{y_n}, e_{y_1} \wedge \ldots \wedge e_{yn}) = 0 .$$

Pour les éléments de la seconde forme, la nullité de q' exprime le caractère quadratique de l'application $x \mapsto q'(e_x \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n})$ et on montre aussi facilement l'orthogonalité de L' avec tout élément de $\Lambda^n R^{(M)}$. Comme le noyau de q' contient L', l'application quadratique q' passe au quotient en une application quadratique $\bar{q} = \Lambda^n q$ de $\Lambda^n M$ dans $S^n N$ vérifiant les conditions (i) et (ii) par construction.

Remarque 3.2.3. Supposons que $N \in \underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$, alors $S^p(N) = N^{\otimes P}$ est dans $\underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$ de sorte qu'on peut se préoccuper de la non dégénérescence des formes en question. Il est clair que, comme cela ne dépend que des formes bilinéaires, les puissances extérieures de modules bilinéaires et de modules quadratiques non dégénérés sont non dégénérés. Notons ici que, bien que cela ne soit pas dans la même catégorie, on appellera encore puissance extérieure de φ, alternée, ou de q, quadratique, le module bilinéaire symétrique $\Lambda^{2h}\varphi$ ou $\Lambda^{2h}\varphi_q$ selon les cas. Tout cela commute naturellement à l'extension des scalaires.

3.3. *Puissances extérieures d'une somme orthogonale*

Soient (M, φ, N) et (M', φ', N) deux modules bilinéaires ε-symétriques ou alternés. La formule bien connue pour les puissances extérieures de la somme directe de deux modules est encore valable pour la somme orthogonale des deux modules bilinéaires (M, φ) et (M', φ').

En effet, en tant que module $\Lambda^p(M \oplus M')$ est la somme directe des produits tensoriels $\Lambda^r M \otimes \Lambda^{p-r} M'$, $0 \leqslant r \leqslant p$. Il suffit donc de vérifier que cette décomposition est une décomposition orthogonale vis-à-vis de la forme bilinéaire $\Lambda^p(\varphi \perp \varphi')$ et que la restriction de cette dernière sur chaque facteur est $\Lambda^r\varphi \otimes \Lambda^{p-r}\varphi'$.

On a des formules analogues pour les modules quadratiques en distinguant bien suivant les parités. Ainsi $\Lambda^{2p+1}(q \perp q') \simeq \perp_{r=0}^{r=2p+1} \Lambda^r q \otimes \Lambda^{(2p+1)-r} q'$ où l'on notera que $\Lambda^o q$ est l'élément unité pour la multiplication de K_0^{SB} et que si r est pair, $(2p+1)-r$ est impair, si bien que l'une des deux formes $\Lambda^r q$ et $\Lambda^{(2p+1)-r} q'$ est une forme quadratique et que l'autre est un module bilinéaire symétrique, le résultat final étant toujours un module quadratique. Par contre $\Lambda^{2p}(q \perp q') \simeq \perp_{r=0}^{2p} \Lambda^r q \otimes \Lambda^{2p-r} q'$ de sorte que r et $2p-r$ sont toujours de même parité. Si r est pair, on a deux modules bilinéaires symétriques dont le produit est un module bilinéaire; si r est impair, on a deux modules quadratiques dont le produit doit être considéré comme un module bilinéaire (cf. 2.2 et 2.5).

Cela montre en particulier que si φ (resp. q) est un module bilinéaire (resp. quadratique) non dégénéré, la classe de $\Lambda^p\varphi$ (resp. $\Lambda^p q$) dans le groupe universel correspondant ne dépend que de la classe de φ (resp. de q). En effet, on montre par récurrence sur p que si $\varphi \perp \varphi_1 \simeq \varphi' \perp \varphi_1$, alors $\Lambda^p\varphi$ et $\Lambda^p\varphi'$ sont stablement isomorphes et de même pour les formes

quadratiques. On remarque alors que si φ est un module bilinéaire et t une indéterminée, on peut poser

$$\Lambda_t(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} [\Lambda^p(\varphi)]\, t^p$$

où $[\Lambda^p(\varphi)]$ est dans un groupe universel convenable. Les considérations du début du paragraphe montrent que $\Lambda_t(\varphi \perp \varphi') = \Lambda_t(\varphi) \,.\, \Lambda_t(\varphi')$. Comme $\Lambda_t(0)$ est l'élément neutre de l'anneau $K_0^{SB}(R)$, on déduit formellement $\Lambda_t(-\varphi)$ comme $[\Lambda_t(\varphi)]^{-1}$ la série formelle, inverse du polynôme $1 + \sum_{p=0}^{\infty} [\Lambda^p(\varphi)]\, t^p$. Maintenant si $z = \varphi_1 - \varphi_2$ est la différence de deux modules bilinéaires, on définit $\Lambda_t(z) = \Lambda_t(\varphi_1)\,[\Lambda_t(\varphi_2)]^{-1}$ et $\Lambda^p(z)$ est le coefficient de degré p de la série formelle $\Lambda_t(z)$. On a ainsi défini des opérations Λ^p de $K_0^{\cdot}(N)$ dans $K_0^*(N^{\otimes p})$ où $* = \,.$ si p est impair et $* = SB$ si p est pair de sorte que Λ_t défini par $\Lambda_t(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \Lambda^p(z)\, t^p$ est additive en z.

Nous n'avons parlé ici que de modules bilinéaires mais il est tout à fait clair que ce formalisme s'adapte tout à fait au cas quadratique.

3.4. *Pré λ-anneaux et λ-anneaux*

Nous rappelons ici brièvement les notions de λ et de pré λ-anneaux ([4], [10]).

Définition. Un pré-λ-anneau est un anneau commutatif et unitaire K, muni d'un homomorphisme de groupes abéliens

$$\lambda_t : K \to U(K[[t]])$$

tels que $\lambda_t(x) = 1 + x\,t + \ldots$

Cela équivaut à la donnée des applications $\lambda^i : K \to K$ vérifiant les conditions

(i) $\lambda^o(x) = 1$

(ii) $\lambda^1(x) = x$

(iii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{p+q=n} \lambda^p(x) \,.\, \lambda^q(y)\,, \quad \forall\, x, y \in K,\ \forall\, n \in \mathbf{N}.$

Un homomorphisme de pré-λ-anneau de (K, λ) dans (K', λ') est un homomorphisme d'anneau f qui commute aux opérations λ.

Dans [10], on définit sur le groupe abélien $1 + K[[t]]^+$ des séries formelles une multiplication $*$ distributive, associative et commutative dont $1 + t$ est élément unité. Sur ce nouvel anneau commutatif et unitaire,

les λ^i permettent de définir des opérations λ sur $K' = 1 + K[[t]]^+$. On dit que K est un λ-anneau si λ_t est un homomorphisme d'anneaux de K dans K' compatible avec les opérations λ^i sur K et K'.

Par exemple on vérifie aisément que Z muni des λ-opérations $\lambda^i(n) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i\,!}$ est un λ-anneau.

En fait, un pré-λ-anneau est un λ-anneau si et seulement si les opérations λ^i vérifient deux séries de relations:

$$\begin{cases} \lambda^i(xy) = P_i(\lambda^1(x), \lambda^2(x), \dots, \lambda^i(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^i(y)) \\ \lambda^j(\lambda^i(x)) = Q_{i,j}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{ij}(x)) \end{cases}$$

où les polynômes P_i et $Q_{i,j}$ sont des polynômes *universels* (i.e. indépendants de K), $P_i \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_i; Y_1, \dots, Y_i]$, $Q_{i,j} \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, \dots, X_{ij}]$ et x et y décrivent K. Les polynômes P_i et $Q_{i,j}$ vérifient certaines conditions d'homogénéité et de symétrie qu'on trouvera dans [10] (voir aussi [4]).

D'autres exemples de λ-anneau sont l'anneau des classes de fibrés vectoriels sur un espace topologique compact et l'anneau $K_0(R)$ des classes de R-modules projectifs de type fini.

3.5. *Opérateurs λ sur L_{Alt} et L_Q*

Les considérations précédentes permettent de voir immédiatement que $K_0^{SB}(R)$ est muni d'une structure de pré-λ-anneau par l'intermédiaire des applications Λ^i. En fait les anneaux de 2.6, $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ sont aussi des pré-λ-anneaux: on posera à cet effet

$$\lambda_t(a_0, a_1) = \lambda_t(a_0, 0)\,\lambda_t(0, a_1)$$

où $\lambda_t(a_0, 0) \in 1 + K_0^{SB}(R)[[t]]^+$ comme vu précédemment et $\lambda_t(0, a_1) = 1 + (0, a_1)\,t + (\Lambda^2 a_1, 0)\,t^2 + \dots + (0, \Lambda^{2k-1}a_1)\,t^{2k-1} + (\Lambda^{2k}a_1, 0)\,t^{2k} + \dots$ En fait, ce sont des pré-λ-anneaux $Z/(2)$-gradués en ce sens que $\lambda^i(L_j) \subset L_{ij}$, le produit ij étant calculé modulo 2.

De la même façon, l'anneau $L = \overline{K_0^{SB}}(R)$ gradué sur $\mathrm{Pic}(R)$ est un pré-λ-anneau $\mathrm{Pic}(R)$-gradué en ce sens que $\lambda^i(L_N) \subset L_{iN}$, $iN = N^{\otimes i}$. Tous les foncteurs oublis induisent des homomorphismes d'anneaux à valeurs dans $K_0(R)$ qui sont des pré-λ-homomorphismes.

On notera ici que les opérations λ ne passent pas au quotient par les espaces hyperboliques car les puissances extérieures paires d'une forme hyperbolique ne sont pas hyperboliques, bien que ce soit le cas pour les puissances extérieures impaires.

3.6. *Puissances symétriques*

Soit $P \in \underline{P}(R)$ et $S^k(P)$ la $k^{\text{ième}}$ puissance symétrique du R-module P. On pose $\sigma_t(P) = \sum_{k=0}^{\infty} [S^k(P)]\, t^k \in K_0(R)[[t]]$ et σ_t se prolonge en un homomorphisme de groupes abéliens de $K_0(R)$ dans $U(K_0(R)[[t]])$. On définit ainsi des opérations $\sigma^k : K_0(R) \to K_0(R)$ et $\sigma_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k(x)\, t^k$. On démontre à l'aide du complexe de Koszul ([2]) la formule

$$\lambda_t(x)\,\sigma_{-t}(x) = 1 \tag{1}$$

pour tout x dans $K_0(R)$. Si f est un endomorphisme de P, on peut associer à f, un polynôme et une série formelle à coefficients dans R, en posant $\lambda_t(f) = \sum_{i=0}^{\infty} Tr(\Lambda^i(f))\, t^i$ et $\sigma_t(f) = \sum_{j=0}^{\infty} Tr(S^j(f))\, t^j$. On a alors la formule analogue

$$\lambda_t(f)\,\sigma_{-t}(f) = 1 \tag{2}$$

qui peut se démontrer directement à l'aide du complexe de Koszul comme dans [2], ou bien en se ramenant au cas où P libre puis où $R = \mathbf{Z}[X_{ij}]$ et enfin à celui où R est un corps algébriquement clos, auquel cas f est triangularisable; les traces se calculent alors en fonction des valeurs propres de f, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et la formule à montrer est une identité bien connue. Les formules (1) et (2) peuvent se combiner en considérant la catégorie des couples (P, f), $P \in \underline{P}(R)$, $f \in \mathrm{End}_R(P)$ dont le groupe universel $K_0(R, \mathbf{N})$ possède des opérations λ et σ et vérifie la formule (1).

Nous allons montrer ici comment on peut définir des puissances symétriques de façon directe pour les modules bilinéaires et pour les modules quadratiques. Rappelons que le *permanent* d'une matrice $a_{ij} \in M_n(R)$ est le scalaire $\sum_{\sigma \in \sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, qui coïncide avec le déterminant en caractéristique 2.

Soit alors (M, φ, N) un module bilinéaire; la puissance symétrique $p^{\text{ième}}$ se définit en considérant l'application qui à $(x_1, \ldots, x_p;\ y_1, \ldots, y_p) \in M^{2p}$ associe le permanent de la matrice $\varphi(x_i, y_j)$, élément de $S^p(N)$. C'est une application linéaire par rapport aux x_i et aux y_j et symétrique séparément par rapport à chaque ensemble de p variables $x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p$ On obtient ainsi un module bilinéaire $(S^pM, S^p\varphi, S^pN)$; si φ est ε-symétrique, $S^p\varphi$ sera ε^p-symétrique et on voit comme dans 3.1 que si φ est

alternée, $S^p\varphi$ est alternée pour p impair (le permanent d'une matrice alternée d'ordre impair est 0). En utilisant la même technique que pour les puissances extérieures (le lemme 3.2.1 a un énoncé analogue en remplaçant Δ_n par le permanent des X_{ij}), on montre qu'un module quadratique (M, q, N) possède des puissances symétriques impaires $(S^{2p+1}M, S^{2p+1}q, S^{2p+1}N)$ avec $\varphi_{S^{2p+1}q} \cong S^{2p+1}\varphi_q$; pour puissances symétriques d'ordre pair, il est naturel de prendre les puissances correspondantes de φ_q.

Comme on a la formule $S^p(\varphi \perp \varphi') \simeq \perp_{r=0}^{p} S^r(\varphi) \otimes S^{p-r}\varphi'$, φ et φ' étant deux modules bilinéaires de même nature, on voit qu'on peut définir sur les anneaux $K_0^{SB}(R)$, $L_{\mathrm{Alt}}(R)$, $L_Q(R)$, $\overline{K_0^{SB}(R)}$ des opérations σ de sorte que $x \overset{\sigma_t}{\mapsto} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k(x)\, t^k$ est un homomorphisme de groupes abéliens σ_t. La formule $1 = \lambda_{-t}(x)\, \sigma_t(x)$ est claire si R est un corps, ou même un anneau semi-local, car il suffit de la montrer pour un module de rang 1 ou 2; elle doit être vraie dans le cas général.

3.7. *Problème*

Bien que cela paraisse naturel, en particulier à cause de l'analogue en K-théorie topologique, je ne sais pas montrer que les anneaux introduits dans la 2e partie sont des λ-anneaux (cf. 3.4). C'est, comme plus haut, vrai si R est semi-local car alors on est ramené à démontrer les formules universelles pour des modules de rang 1 ou 2 (si 2 n'est pas inversible). Il en est naturellement de même pour les modules quadratiques et alternés.

4. λ-ANNEAUX ET ANNEAUX DE WITT-GROETHENDIECK

Dans ce paragraphe, nous rassemblons quelques remarques et résultats concernant les anneaux rencontrés en 2 et 3 et leurs opérations λ. Du fait de 4.3, nous nous intéressons principalement aux anneaux de groupes abéliens et à certains de leurs quotients ([6]).

4.1. *Le λ-anneau* $\mathbf{Z}[G]$

Soit G un groupe abélien noté multiplicativement, $\mathbf{Z}[G]$ son anneau de groupe et $\mathbf{Q}[G]$ la $\mathbf{Q}$-algèbre du groupe G. La formule $\lambda_t(e_g) = 1 + t\, e_g \in \mathbf{Z}[G][[t]]$, $g \in G$, fait de $\mathbf{Z}[G]$ un λ-anneau: il suffit en fait de le montrer pour $\mathbf{Q}[G]$ et, comme il s'agit d'une $\mathbf{Q}$-algèbre, il suffit d'après

[10], 7, de regarder les opérations d'Adams. Elles se calculent aisément sur les générateurs e_g, $g \in G$, et on trouve $\psi^k(e_g) = e_g k$, si bien que ψ^k est l'endomorphisme de $\mathbf{Q}[G]$ induit par l'endomorphisme de groupes abéliens $g \mapsto g^k$. On a donc bien les conditions: ψ^k est un homomorphisme d'anneaux, $\psi^1 = 1_{Q[G]}$ et $\psi^k \circ \psi^h = \psi^{kh}$ et on a vérifié que $\mathbf{Q}[G]$ et donc $\mathbf{Z}[G]$ est un λ-anneau.

Notons que $\mathbf{Z}[G]$, muni de sa graduation sur G est un λ-anneau gradué; si $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ est un λ-anneau (resp. pré-λ-anneau) G-gradué, R_1 est un λ-anneau (resp. pré-λ-anneau). Inversement, si R est un λ-anneau (resp. pré-λ-anneau), $R[G] = R \oplus_z \mathbf{Z}[G]$ est un λ-anneau (resp. pré-λ-anneau) G-gradué par la formule $\lambda_t(re_g) = \lambda_{tg}(r)$. Si par exemple G est d'exposant 2, $g \neq 1$ dans G et si λ_0 (resp. λ_1) est la partie paire (resp. impaire) de λ_t, on a $\lambda_t(r \otimes e_g) = \lambda_0(r) \otimes 1 + \lambda_1(r) \otimes e_g$.

On peut définir dans $\mathbf{Z}[G]$ des opérations γ^i comme pour tout λ-anneau; la filtration associée aux applications γ^i et à l'augmentation $\varepsilon : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$ est la filtration canonique des puissances de l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[G]$.

De même, on définit des opérations σ^j sur $\mathbf{Z}[G]$ par la formule

$$\sigma_t(e_g) = \frac{1}{\lambda_{-t}(e_g)} = \frac{1}{1 - te_g} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n e_{gn} \in \mathbf{Z}[G][[t]] .$$

4.2. *Foncteur oubli*

On sait que $K_0(R)$ est un λ-anneau. Le foncteur oubli induit un homomorphisme de $\overline{K_0^{SB}}(R)$ dans l'anneau $K_0(R)$ [Pic (R)]; ce dernier est un λ-anneau gradué sur Pic (R) et il est immédiat de vérifier que l'homomorphisme ci-dessus est un pré-λ-homomorphisme, compatible avec la graduation. Il en est de même pour les anneaux $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ pour lesquels l'homomorphisme d'oubli est à valeurs dans $K_0(R)$ [$\mathbf{Z}/(2)$].

4.3. *Cas d'un anneau semi-local*

Soit R un anneau semi-local dans lequel 2 est inversible; alors $K_0^{SB}(R)$ est un quotient de l'anneau de groupe $\mathbf{Z}[G]$, $G = U(R)/U^2(R)$, car toute forme quadratique possède une base orthogonale. Comme deux bases orthogonales peuvent être reliées par une suite de bases orthogonales avec au plus deux changements de vecteurs à chaque fois, le noyau I de l'homomorphisme naturel $\mathbf{Z}[G] \to K_0^{SB}(R)$ est engendré par des éléments $e_{\bar{a}} + e_{\bar{b}} - e_{\bar{c}} - e_{\bar{d}}$, a, b, c, $d \in U(R)$ tels que les formes quadratiques

$(x, y) \mapsto ax^2 + by^2$ et $(x, y) \mapsto cx^2 + dy^2$ soient isométriques. D'après 4.1 pour voir que $K_0^{SB}(R)$ est un λ-anneau, il suffit de vérifier que I est un λ-idéal, c'est-à-dire stable par les opérations λ; mais cela est bien clair car si $\eta_1 = e_{\bar{a}} + e_{\bar{b}}$ et $\eta_2 = e_{\bar{c}} + e_{\bar{d}}$, $\lambda^i(\eta_1) \equiv \lambda^i(\eta_2) \bmod I$ pour tout entier i (on a égalité des discriminants et $\lambda^1(\eta_i) = \eta_i$). Des résultats analogues sont vrais pour $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ et l'hypothèse 2 inversible peut être enlevée dans la majeure partie des cas ([6], Th. 1.16).

4.4. *Quotients de* $\mathbf{Z}[G]$

Comme on l'a vu en 4.3 et comme cela a été étudié systématiquement dans [6], certains quotients d'anneaux de groupes abéliens sont des anneaux de Witt-Groethendieck. Nous cherchons ici quelles conditions simples vérifient les idéaux I, contenus dans l'idéal d'augmentation, tels que $\mathbf{Z}[G]/I$ est un λ-anneau. Nous serons amenés à imposer des conditions sur G. On peut toujours supposer que l'application naturelle $G \to A_I = \mathbf{Z}[G]/I$ est injective car c'est un homomorphisme dans le groupe des éléments inversibles de A_I et si H désigne son noyau, A_I est un quotient de $\mathbf{Z}[G/H]$. L'idéal I ne contient alors que des éléments de la forme

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} e_{g_i} - \sum_{i=1}^{n} e_{g'_i}, \quad n \geqslant 2;$$

dans ce cas, en calculant $\lambda^n\left(\sum_{i=1}^{n} e_{g_i}\right)$, on voit qu'on doit avoir $g_1 \ldots . g_n = g'_1 \ldots . g'_n$. De même en calculant λ^{n-1} et en utilisant l'égalité précédente, on trouve que $\sum_{i=1}^{n} e_{g_i^{-1}} \sum_{i=1}^{n} e_{g_i'^{-1}}$ est encore dans I, c'est-à-dire que I doit être stable par l'involution canonique τ de $\mathbf{Z}[G]$ donnée par $\tau(e_g) = e_{g^{-1}}$.

Pour nous trouver le plus près possible du cas des modules bilinéaires, nous cherchons les λ-idéaux I engendrés par des éléments de la forme (1) avec $n = 2$. On voit alors que la seule condition pour que $\mathbf{Z}[G]/I$ soit un λ-anneau est que $g_1 g_2 = h_1 h_2$; multipliant par $e_{g_1^{-1}}$, on voit que I est engendré par des éléments de la forme $\eta_c^d = e_1 + e_d - e_c - e_{c^{-1}d}$; on pose alors $N_d = \{ c \mid c \in G \text{ et } \eta_c^d \in I \}$. La forme même de η_c^d montre que N_d est « symétrique » par rapport à d et contient 1; de façon analogue, on peut définir $H_c = \{ d \mid d \in G \text{ et } \eta_c^d \in I \}$. La connaissance de I équivaut à celle des H_c ou des N_d. On a par exemple le

LEMME. *Si G est un groupe d'exposant 2, N_d est un sous-groupe de G.*

Si c_1 et c_2 sont dans N_d, $e_{c_1} + e_{c_1^{-1}d} - e_{c_2} - e_{c_2^{-1}d} \in I$ et comme $c_1 = c_1^{-1}$, $e_1 + e_d - e_{c_1c_2} - e_{c_1c_2d} \in I$, c'est-à-dire le résultat voulu.

La donnée de I revient à la donnée des sous-groupes N_d si G est un groupe d'exposant 2. Les sous-groupes N_d ne sont pas indépendants: outre le fait que $d \in N_d$, on a: si $c \in N_d \cap N_d$, alors $c \in N_{cdd'}$. Supposons par exemple $G = \mathbf{Z}/(2) = \{ 1, g \}$. On a $N_g = G$ et deux possibilités pour N_1: soit G et on se trouve dans le cas d'un corps fini, soit le groupe réduit à l'élément neutre et on tombe sur le cas du corps des réels, l'idéal I étant réduit à $\{ 0 \}$. Si $G = \mathbf{Z}/(2) \times \mathbf{Z}/(2)$, il y a quatre sous-groupes de G à se donner: pour trois d'entre eux, il y a deux possibilités suivant qu'ils sont égaux à G tout entier ou à $\{ 1, g \}$ où g est l'un des éléments non nuls de G. Pour N_1, il y a cinq possibilités; si tous les N_g, $g \neq 1$, et N_1 sont égaux à G, cela veut dire que deux éléments d'augmentation 2 sont équivalents modulo I si et seulement si ils ont même discriminant. Les autres possibilités peuvent être décrites explicitement.

4.5. *V-forme et λ-anneau*

L'étude des λ-anneaux $\mathbf{Z}[G]/I$, G d'exposant 2, se rattache aux V-formes au sens de [5]. On suppose I engendré par des éléments de la forme $e_1 + e_d - (e_c + e_{cd})$ et donc I est caractérisé par la donnée des sous-groupes N_d. Considérons alors les applications biadditives symétriques φ de $G \times G$ dans les groupes abéliens telles que $\varphi(a, b) = 0$ si et seulement si $a \in N_{ab}$. Cela définit un groupe abélien W quotient de $G \otimes_{\mathbf{Z}} G$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a \otimes b$, tels que $a \in N_{ab}$ (notons que $\varphi(a, b) = 0$ équivaut à $\varphi(b, a) = 0$ car $ab \in N_{ab}$ et donc $b \in N_{ab}$ si $a \in N_{ab}$). Notons alors $\bar{\varphi}$ l'application canonique de $G \times G$ dans W. On a la proposition:

PROPOSITION. *I est l'idéal engendré par les éléments de la forme $(e_\alpha + e_\beta) - (e_\gamma + e_\delta)$ tels que $\bar{\varphi}(\alpha, \beta) = \bar{\varphi}(\gamma, \delta)$ et $\alpha\beta = \gamma\delta$.*

Si $e_\alpha + e_\beta - e_\gamma - e_\delta \in I$, on a $\alpha\beta = \gamma\delta$ et donc $e_1 + e_{\alpha\beta} - e_{\alpha\gamma} - e_{\alpha\delta} \in I$, soit $\bar{\varphi}(\alpha\gamma, \alpha\delta) = 0$. Cela donne $\bar{\varphi}(\alpha, \alpha\gamma\delta) = \bar{\varphi}(\gamma, \delta)$ et comme $\alpha\gamma\delta = \beta$, on obtient la partie directe. Inversement si $\alpha\beta = \gamma\delta$ et $\bar{\varphi}(\alpha, \beta) = \bar{\varphi}(\gamma, \delta)$, le même calcul montre que $\bar{\varphi}(\alpha\gamma, \beta\gamma) = 0$, soit $\alpha\gamma \in N_{\alpha\beta}$. Cela donne $e_1 + e_{\alpha\beta} - e_{\alpha\gamma} - e_{\beta\gamma} \in I$ soit $(e_\alpha + e_\beta) - (e_\gamma + e_\delta) \in I$, d'où la proposition.

Dans les hypothèses de 4.5, soit J l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[G]/I$; il est engendré par les classes des éléments $\bar{a} = e_1 - e_a$, $a \in G - \{ 1 \}$. L'application naturelle de G dans J qui à a associe $\bar{a}$ induit un isomorphisme de G sur le groupe $J_{/J^2}$ car $\overline{ab} - \bar{a} - \bar{b} = e_1 - e_{ab} - (e_1 - e_a) - (e_1 - e_b)$

$= e_a + e_b - e_{ab} - e_1 = -(e_a - e_1)(e_b - e_1)$. On a, de même, une application naturelle ψ de $G \times G$ dans J^2 qui au couple (a, b) associe le produit $\bar{a} \,.\, \bar{b}$ dans $A_I = \mathbf{Z}[G]/I$; il est clair que cette application est symétrique. De plus $\psi(a, b) + \psi(a, c) - \psi(a, bc)$ est l'image dans A_I de $(e_1 - e_a)$ $(e_1 - e_b)$ $(e_1 - e_c)$, c'est-à-dire que ψ induit une application biadditive symétrique de $G \times G$ dans J^2/J^3 qui est surjective car les éléments $\bar{a} \,.\, \bar{b}$ engendrent J^2. On voit immédiatement que $\psi(a, b) = 0$ si $a \in N_{ab}$, donc ψ induit une surjection de W sur le groupe J^2/J^3. Une démonstration directement inspirée de [8], III, § 5, permet de montrer que cette surjection est un isomorphisme.

Appendice: Discriminant et déterminant

Soit $X = \mathrm{Spec}(R)$ l'ensemble des idéaux premiers de R muni de la topologie de Zariski et $H_0(R)$ l'anneau des fonctions continues de Spec (R) dans Z muni de la topologie discrète. Comme X est quasi-compact, un élément f de $H_0(R)$ est la donnée d'une partition finie de X en parties ouvertes et fermées X_i et pour chaque X_i d'un entier naturel n_i qui est la valeur de f sur X_i. Si $P \in \mathscr{P}(R)$, pour chaque idéal premier $\underline{p}$, $P_{\underline{p}}$ est un $A_{\underline{p}}$-module libre de rang $r_p(\underline{p})$; la fonction r_p définie sur X par $\underline{p} \mapsto r_p(\underline{p})$ est continue (i.e. localement constante). C'est donc un élément de $H_0(R)$ qu'on note r_p. On a alors un homomorphisme d'anneaux $r : K_0(R) \to H_0(R)$ car $r_{p \oplus p'} = r_p + r_{p'}$, et $r_{p \otimes Q} = r_p \, r_Q$, dont le noyau mesure la non-liberté (stablement) des R-modules projectifs de type fini ([2]). Cet homomorphisme est surjectif car si $f \in H_0(R)$ est positive et $f^{-1}(n_i) = X_i = \mathrm{Spec}\,(R\, e_i)$, $P = \bigoplus_{i \in I} (R\, e_i)^{n_i}$ est un R-module projectif de type fini de rang $r_p = f$.

Soit de nouveau $f \in H_0(R)$ une fonction positive; nous pouvons définir sur $K_0(R)$, $K_0^{SB}(R)$, ... des opérations λ^f et σ^f. En effet, soit n_i la valeur prise par f sur $X_i = \mathrm{Spec}\, R\, e_i$: tout module projectif P est somme directe des $P\, e_i$ et on pose $\Lambda^f P = \bigoplus_{i \in I} \Lambda^{n_i}(P\, e_i)$ et de même pour SB ou pour des modules bilinéaires ou quadratiques. En particulier, on appelle *déterminant* de P, le R-module $\Lambda^{rp} P$ qui est projectif de type fini et de rang 1 et on le note dét P ([2]). On voit immédiatement que dét $(P \oplus Q) =$ dét P $\otimes$ dét Q. Les opérations Λ^f et S^f et l'homomorphisme déterminant s'étendent à $K_0(R)$, tout entier ainsi qu'aux anneaux considérés dans la partie 3 (si $N \in \underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$, dét $N = N$ et l'inverse de N est N^*; ainsi dét $(-[P])$

$=$ dét $(P)^*$...). L'homomorphisme déterminant va de $K_0(R)$ dans $\mathrm{Pic}(R)$; $N^{\otimes f}$ se définit pour $f \in H_0(R)$ par $\bigoplus_{n_i \geq 0} (N e_i)^{\otimes n_i} \bigoplus_{n_i \leq 0} (N^* e_i)^{\otimes n_i}$).)

Dans le cas des modules bilinéaires, symétriques ou alternées, ou encore quadratiques, on définit le discriminant de (M, φ, N) comme le module bilinéaire $\mathrm{dis}(\varphi) = (\text{dét } M, \Lambda^{r_M}\varphi, N^{\otimes r_M})$ et on a la formule $\mathrm{dis}(\varphi \otimes \varphi') = \mathrm{dis}\,\varphi \otimes \mathrm{dis}\,\varphi'$. On obtient ainsi par exemple des homomorphismes $\mathrm{dis} : K_0^{SB}(R) \to U(K_0^{SB}(R))$ et $\mathrm{dis} : \overline{K_0^{SB}}(R) \to U(\overline{K_0^{SB}}(R))$, ces deux derniers groupes se déterminent aisément. On a un homomorphisme surjectif de ces deux groupes dans $Ip(R)$ groupe des éléments inversibles de $H_0(R)$ (fonctions continues de Spec R dans $\{-1, +1\}$) dont le noyau U_0 est respectivement l'ensemble des classes d'isomorphisme des paires (P, α), $P \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$, α isomorphisme de $P \otimes P$ dans R, et des triples $(P, \alpha. Q)$, $P, Q \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$ et α isomorphisme de $P \otimes P$ dans Q. On a alors les deux suites exactes de groupes abéliens

$$U(R)^2 \to U(R) \to U_o(K_0^{SB}(R)) \to \mathrm{Pic}(R)^2 \to \mathrm{Pic}(R)$$
$$U(R)^2 \to U(R) \to U_o(\overline{K_0^{SB}}(R)) \to \mathrm{Pic}(R) \to 0$$

Le groupe $U_0(K_0^{SB}(R))$ est le groupe $\mathscr{P}(R)$ considéré dans [7]. Le discriminant d'un module bilinéaire alterné est toujours un module bilinéaire symétrique de rang 1. Dans le cas quadratique, cela dépend de la parité du rang du module. On dispose dans ce cas d'un invariant plus fin, l'invariant d'Arf pour lequel nous renvoyons à [7] et qui se ramène au discriminant si $\frac{1}{2} \in R$.

Le discriminant d'un module métabolique ou hyperbolique n'est pas toujours trivial. En effet, dis $H(P)$ est canoniquement isomorphe à $(\text{dét } P \otimes \text{dét } P^*, \varphi_p, A)$ où φ_p : dét $P \otimes$ dét $P^* \to A$ est l'isomorphisme qui envoie le générateur canonique de dét $P \otimes$ dét P^* sur $(-1)^{r_P}$. Pour obtenir une application discriminante sur $K_0^{SB}(R)$ nulle sur les espaces hyperboliques, il faut modifier la définition du discriminant en multipliant le discriminant ordinaire par un facteur correctif dépendant du rang du module. Ce n'est plus un homomorphisme de groupes mais cela le redevient si on fait intervenir le rang modulo 2 du module.

Une dernière remarque: soit (M, φ, N) un module bilinéaire (ou quadratique) tel que r_M soit impair, donc de la forme $1-2f$. Alors $\Lambda^{r_M}\varphi$ est un isomorphisme de dét $M \otimes$ dét M sur $N^{\otimes r_M}$, ce qui montre que N est isomorphe à $(\text{dét } M \otimes N^{\otimes f})^2 = Q \otimes Q$ de sorte qu'on peut ramener (M, φ, N) à une forme bilinéaire à valeurs scalaires sur $M \otimes Q^*$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS, H. *Lectures on topics in algebraic K-theory*. Tata Institute, Bombay, 1967.
[2] —— *Algebraic K-theory*. Benjamin, 1968.
[3] BOURBAKI, N. *Algèbre, Chapitre 9*. Hermann, 1959.
[4] HIRZEBRUCH, F. *Topological methods in algebraic geometry*. Springer 1966.
[5] KAPLANSKY, I. and R. SHAKER. Abstract quadratic forms. *Can. J. Math. 21* (1969), pp. 1218-1233.
[6] KNEBUSH, M., A. ROSENBERG and R. WARE. Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings. *Amer. J. Math. 44* (1972), pp. 119-155.
[7] MICALI, A. et O. VILLAMAYOR. Sur les algèbres de Clifford II. *J. Reine Angew. Math. 242* (1970), pp. 61-90.
[8] MILNOR, J. and D. HUSEMOLLER. *Symmetric bilinear forms*. Springer, 1973.
[9] SAH CHIH-HAN. Symmetric bilinear forms and quadratic forms. *J. Algebra 20* (1972), pp. 144-160.
[10] S.G.A.6. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. *Lecture Note 225*. Springer, 1971.

(Reçu le 6 novembre 1978)

Philippe Revoy

Institut de Mathématiques
Place Eugène-Bataillon
F-34060 Montpellier