Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: KLASSIFIKATIONSTHEORIE ENDLICH-DIMENSIONALER ALGEBREN IN DER ZEIT VON 1880 BIS 1920

Autor: Happel, Dieter

Kapitel: I. Die Ideen von Study

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51060

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Für ihn ist die Untersuchung endlich-dimensionaler Algebren keine „spielende und willkürliche Wahl der Gesetze des elementaren Rechnens", sondern eine neue „Methode der analytischen Geometrie, zu einem ganz bestimmten Zwecke erfunden", nämlich zur Beschreibung von Systemen von linearen Transformationen auf Vektorräumen, und damit „eine zweckmäßige Methode, die zwar so wenig, als überhaupt irgend eine Methode unumgänglich nothwendig ist, aber doch zur Zeit keineswegs ebenso gut auch entbehrt werden kann... In der Art der Anwendung ist es durchaus vergleichbar mit der Verwertung der Functionen einer complexen Veränderlichen in der Lehre von der conformen Abbildung, worin die complexen Zahlen auch nicht in ihrer Eigenschaft als Erweiterung der reellen Zahlen, sondern als ein analytisch-geometrischer Algorithmus zur Verwendung gelangen... Gerade die Mathematiker, die am eifrigsten gegen die Quaternionen und ähnliche Calculs zu Felde ziehen, machen bei geometrischen Untersuchungen von dem Calcul der gewöhnlichen complexen Zahlen unbedenklich den ausgedehntesten Gebrauch. Sie berufen sich mit Unrecht auf die Autorität von Gauß, um die hier bekämpften Anschauungen zu stützen: Wir besitzen von Gauß ein authentisches Zeugnis, das über seine Stellung zu dieser Frage keinen Zweifel läßt. Warum soll es auch durchaus nicht erlaubt sein, eine abkürzende Bereicherung zu gebrauchen, wenn sie bequem und sachgemäß ist?" Und Study fügt als Fußnote hinzu: „Ich freue mich, hier Herrn Dedekind zu begegnen, der sich in ähnlichem Sinne über die Quaternionen ausgesprochen hat."

Die Bibliographie, die wir am Ende des Artikels zusammengestellt haben, zeigt, daß sich trotz dieses Unbehagens sehr viele Mathematiker mit diesem Thema beschäftigt haben.

I. Die Ideen von Study

Im Jahre 1890 veröffentlicht Study einen bemerkenswerten Übersichtsartikel [47], der sehr viele Ideen enthält, die die damalige Entwicklung befruchteten, aber auch einiges was nicht weiterverfolgt wurde und erst heute im Wechselspiel zwischen algebraischen und geometrischen Methoden betrachtet wird.

Zunächst wollen wir die Definition einer endlich-dimensionalen assoziativen Algebra mit Eins über den komplexen Zahlen rekapitulieren, wie sie in dieser Arbeit enthalten ist. Dabei wollen wir nicht die ungeheure Vorarbeit von Grassmann [15], Pierce [31] und anderer Mathematiker

vergessen, die die Grundlagen entwickelten. Während des ganzen Abschnitts benutzen wir moderne Terminologie, und fügen in Klammern die damals gebräuchlichen Termini ein.

Sei nun $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis (n Haupteinheiten) von $\mathbf{C}^n$. Die Elemente von $\mathbf{C}^n$ (extensive Größen) sind also die möglichen Linearkombinationen mit komplexen Koeffizienten. Das Produkt wird durch folgende Bedingungen definiert [47, p. 283f].

„1. Es muss das Produkt von irgend zweien der extensiven Größen mit denselben Haupteinheiten aufgefaßt werden können. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, vermöge des distributiven Gesetzes, das Bestehen von n^2 Relationen der Form

$$(1) \qquad e_i e_k = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{iks} e_s$$

worin die Coefficienten γ_{iks} gewöhnliche reelle oder complexe Zahlen vorstellen.

2. Es muss durch irgend drei der extensiven Größen das in der Formel

$$(2) \qquad (ab)\,c = a\,(bc)$$

ausgesprochene sogenannte associative Gesetz der Multiplikation erfüllt sein.
Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Bestehen sämmtlicher Relationen der Form

$$(3) \qquad (e_i e_k)\, e_j = e_i\,(e_k e_j) \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

d.h. das Bestehen des folgenden Systems von quadratischen Identitäten für die unter (1) eingeführten Constanten γ_{iks}

$$(4) \qquad \sum_{s=1}^{n} \gamma_{iks}\gamma_{sjt} = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{kjs}\gamma_{ist} \qquad (i, k, j, t = 1, \ldots, n)$$

3. Es muss unter den extensiven Größen eine Größe e^0 vorhanden sein, die den beiden Gleichungen

$$(5) \qquad e^\circ x = x\,, \qquad x e^\circ = x$$

unabhängig von x genügt.“

Wir sehen, daß sich die Bedingungen (1) bis (5) von der heutigen Definition einer endlich-dimensionalen assoziativen Algebra mit Eins nicht

unterscheiden. Früher wurden diese Systeme auch Systeme von complexen Zahlen oder hypercomplexe Zahlensysteme genannt. Im folgenden verstehen wir unter einer Algebra immer eine, die den Bedingungen (1) bis (5) genügt. Study's weitere Ausführungen enthalten nun den folgenden Satz über die Menge Alg_n aller Algebren einer festen Dimension n.

SATZ: Alg_n *ist eine offene Untervarietät einer affinen Varietät.*

Sein Beweis: Die Bedingung (4) ist eine abgeschlossene Bedingung auf der Menge der Strukturkonstanten (γ_{iks} ; $i, k, s = 1, \ldots, n$). Die Bedingung (5) läßt sich dadurch interpretieren, daß gewisse Determinanten in den Strukturkonstanten nicht verschwinden.

Das zentrale Problem beschreibt Study nun wie folgt [47, p. 288 f].

„Als eine Fundamentalaufgabe in der Theorie der Systeme von complexen Zahlen muss die bezeichnet werden: ‚Alle Systeme von complexen Zahlen mit n Haupteinheiten zu bestimmen.'

Man kann die Aufgabe nicht etwa so stellen: ‚Das allgemeinste System von complexen Zahlen in n Haupteinheiten zu finden'; denn es ist nicht von vornherein klar, und, wie die nähere Untersuchung zeigt, auch nicht richtig, daß die Systeme von Constanten γ_{iks}, die den Bedingungen (1), (4), (5) genügen, eine irreducibele Mannigfaltigkeit bilden: Sie zerfallen vielmehr in verschiedene Gebiete, deren allgemeinste Repräsentanten unter sich gleichwertig und als gleich allgemein zu betrachten sind, insofern keines von ihnen aus einem anderen durch einen Grenzübergang erhalten werden kann. Da wir uns aber über die Natur dieser Gebiete in völliger Unkenntnis befinden, so bleibt uns nicht übrig, als bei kleinen Werten der Zahl n zu versuchen, die vorhandenen Systeme unmittelbar zu bestimmen."

Also wäre nach Study eine der Hauptaufgaben die irreduziblen Komponenten von Alg_n zu bestimmen. Dieses Problem, welches damals nicht gelöst wurde, ist von Gabriel [60] wieder aufgegriffen und mittels algebraisch geometrischer Begriffsbildungen formuliert worden. Dabei betrachten wir die folgende Situation. Auf Alg_n operiert die allgemeine lineare Gruppe durch Basiswechsel. Die Bahnen dieser Operation sind natürlich die Isomorphieklassen. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten für die irreduziblen Komponenten: entweder sie enthalten eine offene Bahn, oder sie enthalten eine offene Teilmenge, die Vereinigung von unendlich vielen Bahnen gleicher Dimension ist. Die Algebren, die diese Bahnen erzeugen, sind die „allgemeinsten Repräsentanten" im Sinne von Study.

Die Beschreibung dieser Algebren, aus denen durch Entartung dann alle anderen Algebren entstehen, gehört zu einem wichtigen Problem in der Theorie der endlich-dimensionalen Algebren, welche neben den Anwendungen in der Darstellungstheorie [60] und der algebraischen Geometrie [57] Einblicke in die komplizierte Struktur aller Algebren ermöglicht.

Die Bedeutung der Arbeit Study's läßt sich aber auch an sehr konkreten Beiträgen ablesen, die wir nun besprechen wollen. Er diskutiert die Begriffe Isomorphie und Antiisomorphie (reciproke Algebra) und führt die folgende interessante Invariante ein. Sei A eine n-dimensionale Algebra. Dann ist die Ordnung ord (A) von A definiert als die größte Zahl i, für die es ein $x \in A$ gibt, so daß $1 = x^0, x, \ldots, x^{i-1}$ linear unabhängig sind. Diese Invariante ermöglicht eine grobe Klasseneinteilung der Algebren, welche bei den späteren Klassifikationen (siehe II.) benutzt wurde. Study betrachtete insbesondere die Klasse der Algebren, für die die Ordnung gleich der Dimension ist und formulierte den folgenden Satz:

SATZ: $X = \{ A \in \mathrm{Alg}_n \mid \mathrm{ord}\,(A) = n \}$ *ist eine irreduzible Varietät.*

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß alle Algebren in X kommutativ sind und daß es eine Bijektion zwischen den Partitionen von n und den Isomorphieklassen von Algebren in X gibt. Falls $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ eine Partition von n ist, so definieren wir $A = \prod_{i=1}^{r} \mathbf{C}\,[x] / (x^{\lambda_i})$. Weiter sehen wir, daß die Algebra zur Partition $\lambda = (1, \ldots, 1)$, also $\mathbf{C}^n$ mit komponentenweiser Multiplikation nach A_λ entartet. Also ist X irreduzibel.

(Man kann das Entartungsverhalten der Algebren in X mit Hilfe einer geeigneten Anordnung der Partitionen beschreiben [64].)

In dieser Arbeit klassifiziert Study schließlich die Algebren der Dimension vier und fügt die damals schon bekannten Tabellen in den kleineren Dimensionen hinzu. Er vergißt dabei allerdings im Fall $n = 4$ die folgende Algebra:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \; a, b, c, d \in \mathbf{C} \right\}$$

Ein zweiter ausführlicher Teil beschäftigt sich detailliert mit Zusammenhängen zur Theorie der Transformationsgruppen, die von Lie eingeführt wurde. Weitere Informationen dazu finden sich in [27].