2. Représentations polynomiales de GL_n

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ainsi, la généralisation des modules libres aux modules projectifs se traduit par une structure supplémentaire: l'action de $K_0(A)$ sur l'idéal d'augmentation.

(2) Si V est une représentation de G sur A de forme matricielle $\rho : G \to GL_n(A)$, on peut considérer $\rho^* : R_A(GL_n(A)) \to R_A(G)$ et alors

$$[V] = \rho^*[A^n_{id}]$$

où $[A^n_{id}]$ est la classe de la représentation $id : GL_n(A) \to GL_n(A)$. De ce point de vue, les groupes $GL_n(A)$ jouent un rôle universel pour les représentations. Nous allons donc étudier maintenant un type particulier de représentations de $GL_n(A)$.

2. Représentations polynomiales de GL_n

Soit A un anneau commutatif avec unité. On considère le foncteur

$$GL_n : \mathscr{A}lg_A \to \mathscr{G}r \; ; \; A' \mapsto GL_n(A')$$

de la catégorie des A-algèbres commutatives avec unité dans celle des groupes. Une *représentation polynomiale* de GL_n sur l'anneau A est une transformation naturelle de foncteurs

$$\rho : GL_n \to GL_m$$

déterminée par une famille de polynômes $\rho_{ij}(X_{11}, ..., X_{nn}, \det(X)^{-1})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ à coefficients dans A comme suit:

$$\rho_{A'} : GL_n(A') \to GL_m(A')$$

est définie par les fonctions polynomiales ρ_{ij} sur A'.

Exemple. La puissance extérieure $\lambda^2 : GL_2 \to GL_1$ est une représentation polynomiale sur $\mathbf{Z}$ définie par la fonction polynomiale

$$\rho(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} .$$

Comme $GL_n(A)$ est un groupe algébrique affine, son algèbre affine

$$A(GL_n) = A[X_{11}, ..., X_{nn}, \det(X)^{-1}]$$

(algèbre des fonctions polynomiales sur GL_n) est une *algèbre de Hopf* (la multiplication $GL_n \times GL_n \to GL_n$ induit la comultiplication

$$A(GL_n) \to A(GL_n \times GL_n) = A(GL_n) \otimes A(GL_n)) .$$

Soit E un A-module. Une structure de $A(GL_n)$-comodule sur E est la donnée d'un homomorphisme A-linéaire

$$d_E : E \to A(GL_n) \otimes {}_A E$$

vérifiant les axiomes duaux d'une structure de module. Un *homomorphisme* de $A(GL_n)$-comodules $f : E \to E'$ est une application A-linéaire compatible avec d_E et $d_{E'}$. L'ensemble

$$\mathrm{Hom}^{A(GL_n)}(E, E')$$

des homomorphismes de $A(GL_n)$-comodules est donc un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_A(E, E')$ des applications A-linéaires. On montre alors que la catégorie des $A(GL_n)$-comodules est abélienne [9] (pour l'existence de noyaux, on utilise le fait que $A(GL_n)$ est un A-module plat, ce qui assure que si $E \subset E'$, alors $A(GL_n) \otimes E \subset A(GL_n) \otimes E'$).

LEMME 2.1. *La donnée d'une classe de conjugaison par des matrices de $GL_m(A)$ d'une représentation polynomiale $\rho : GL_n \to GL_m$ est équivalente à celle d'une classe d'isomorphisme de $A(GL_n)$-comodules A-libres de rang m.*

Preuve. La correspondance est donnée par la formule

$$d_E(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \rho_{ji}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}) \otimes e_j$$

où $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une A-base de A^m. □

Soit $\mathscr{P}_A(GL_n)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $A(GL_n)$-comodules formée des comodules qui sont *projectifs de type fini en tant que A-modules* (généralisation des représentations polynomiales de GL_n). On note alors $R_A(GL_n)$ le groupe de Grothendieck de $\mathscr{P}_A(GL_n)$ (quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme d'objets $\{E\}$ de $\mathscr{P}_A(GL_n)$ par les relations $\{E\} = \{E'\} + \{E''\}$ associées aux suites exactes $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$. Le produit tensoriel sur $A : (E, E') \mapsto E \otimes {}_A E'$ muni de la structure de comodule

$$E \otimes E' \xrightarrow{d_E \otimes d_{E'}} A(GL_n) \otimes A(GL_n) \otimes E \otimes E' \xrightarrow{m \otimes id} A(GL_n) \otimes E \otimes E'$$

(où m est la multiplication de l'algèbre de Hopf $A(GL_n)$ induite par la diagonale $\Delta : GL_n \to GL_n \times GL_n$) préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit une structure d'anneau commutatif avec unité sur $R_A(GL_n)$ (l'unité est la classe du $A(GL_n)$-comodule A défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$).

2.2. La donnée d'un $A\,(GL_n)$-comodule E fournit pour toute A-algèbre A' un $A'\,[GL_n\,(A')]$-module par:

$$A'\,[GL_n(A')] \otimes_A E \xrightarrow{id \otimes d_E} A'\,[GL_n(A')] \otimes_A A\,(GL_n) \otimes E \xrightarrow{\acute{e}v \otimes id} A' \otimes_A E$$

où $\acute{e}v : A'\,[GL_n\,(A')] \otimes_A A\,(GL_n) \to A'$ est l'homomorphisme d'évaluation. Par suite, on a des *homomorphismes d'anneaux canoniques*

$$e_{A'} : R_A\,(GL_n) \to R_{A'}\,(GL_n\,(A'))\,;\; E \mapsto A' \otimes_A E\,.$$

Remarque. D'une manière générale, si H est une algèbre de Hopf qui est de plus un A-module plat, on notera $R_A\,(H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A\,(H)$ des H-comodules qui sont projectifs de type fini en tant que A-modules. Comme pour $R_A\,(GL_n)$, on montre que $R_A\,(H)$ est un anneau commutatif avec unité. Nous utiliserons les algèbres de Hopf

$$A\,(M_n) = A\,[X_{11}, \ldots, X_{nn}],\; A\,(T_n)$$
$$= A\,[X_1, \ldots, X_n],\; A\,(M_n \times M_m) = A\,[X_{11}, \ldots, X_{nn};\; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}]\,,$$

dont les groupes de Grothendieck $R_A\,(H)$ s'interprètent comme représentations polynomiales de M_n ($n \times n$ matrices), T_n (matrices diagonales) et $M_n \times M_m$ respectivement.

3. Le pré-λ-anneau $R_A\,(H)$

Définition 3.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau (λ-ring) R est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda^0\,(x) = 1$ et $\lambda^1\,(x) = x$

(ii) $\lambda^k\,(x+y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i\,(x) \cdot \lambda^{k-i}\,(y)\,.$

En introduisant les séries formelles $\lambda_t\,(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\,(x)\,t^i$ et

$$\psi_{-t}(x) = -\,t\,\frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x)) = -\,t\left(\frac{d}{dt}\,\lambda_t(x)\right)(\lambda_t\,(x))^{-1}\,,$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \to R$, $k > 0$ *(opérations d'Adams)* par

$$\psi_{-t}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \psi^i\,(x)\,t^i\,.$$