Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

par Daniel LINES

INTRODUCTION

Ce travail ne contient rien de nouveau, mais voudrait simplement servir de référence à l'établissement des propriétés élémentaires de la notion de revêtement ramifié en topologie algébrique. Dans cette partie des mathématiques, on se trouve souvent dans la situation où l'on a un revêtement fini du complémentaire d'une sous-variété de codimension deux dans une variété (par exemple un nœud ou un enlacement de dimension $n-2$ dans la sphère S^n) que l'on aimerait « étendre » à cette dernière. Cette extension est ce qu'on appelle un revêtement ramifié. Le but de cet article est de montrer que sous des hypothèses très simples on arrive à des théorèmes satisfaisants d'existence et d'unicité des revêtements ramifiés. Pour une définition plus générale des revêtements ramifiés, le lecteur est renvoyé à l'article de R. H. Fox [1]. Je tiens à remercier le professeur Claude Weber, qui m'a initié aux arcanes des revêtements ramifiés, pour son aide et ses utiles suggestions.

Toutes les variétés considérées sont des variétés de classe C^0 compactes, sans bord; elles peuvent avoir plusieurs composantes connexes. On dénote par dim X la dimension de Lebesgue de X.

Si X et Y sont deux variétés de dimension m et n respectivement, $X \subset Y$ (et donc $m \leqslant n$), on dit que X est une sous-variété localement plate de Y si pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x dans Y et un homéomorphisme $\varphi : U \to D^n \times D^{n-m}$ où D^k désigne la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^k$ tels que $\varphi(U \cap X) = D^m \times \{0\}$ et $\varphi(x) = (0; 0)$. (Un nœud apprivoisé est une sous-variété localement plate de S^3, un nœud sauvage ne l'est pas.)

Définition. Soient M et N deux variétés compactes de dimension $n \geqslant 2$, B une sous-variété localement plate de codimension 2 de N et

$f : M \to N$ une application continue surjective. Soit $A = f^{-1}(B)$. On dit que f est un revêtement ramifié de N (ramifié sur B et d'ensemble de ramification A) si:

1) $f \mid M \setminus A : M \setminus A \longrightarrow N \setminus B$ est un revêtement fini.
2) $N \setminus B$ est exactement l'ensemble des points de N qui possède la propriété de revêtement.
3) Les composantes connexes des $f^{-1}(U)$ où $U \subset N$ est un ouvert quelconque forment une base de la topologie de M.

Remarques. La condition 2) signifie simplement que B est l'ensemble des points « singuliers » et qu'on ne peut pas étendre f en un vrai revêtement sur une partie de B.

La condition 3) assure que A n'est pas trop « gros » (dans un sens à préciser ci-dessous) et empêche par exemple que la projection f: $S^2 \longrightarrow S^2$ qui identifie tout l'hémisphère sud y compris l'équateur en un point ne soit un revêtement ramifié. En effet, f satisfait aux propriétés 1) et 2) avec B = un point, A = hémisphère sud mais l'image réciproque de tout voisinage ouvert de B contient A et contredit donc 3).

LEMME 1. Si $f : M \longrightarrow N$ est un revêtement ramifié sur B, d'ensemble de ramification A alors

i) $\dim A \leqslant n - 2$.
ii) A est sans points intérieurs et ne sépare pas localement M (c'est-à-dire que tout point de A possède un système fondamental de voisinages $\{ U_i \}_{i \in I}$ dans M tel que $U_i \setminus A$ soit connexe pour tout i).

Démonstration de i). Montrons tout d'abord que toute fibre de f est totalement discontinue.

Soit $y \in M$ et $x \in f^{-1}(y)$. Soit C un connexe de $f^{-1}(y)$ qui contient x, il faut voir que C est réduit à x. En effet, il existerait sinon x' distinct de x, $x' \in C$. Par la condition 3) on peut trouver un ouvert U contenant y et tel que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ où les V_i sont connexes disjoints et tels que $x \in V_{i_o}$, $x' \in V_{i_o'}$ avec $i_o \neq i_0'$. Alors $C \cap V_{i_o}$ et $C \cap (\bigcup_{i \neq i_o} V_i)$ sont deux ouverts disjoints non-vides de C dont la réunion égale C, ce qui est absurde. $f^{-1}(y)$ est un sous-espace compact totalement discontinu, il est donc de dimension de Lebesgue zéro. $f \mid A : A \longrightarrow B$ est une application

fermée puisque A est compact. Le théorème VI 7 page 91 de [2] [1]) montre que $\dim A \leqslant \dim B = n - 2$.

Démonstration de ii). Si A avait des points intérieurs, A contiendrait une boule ouverte et donc aussi une boule fermée β de dimension n. Comme $\dim \beta \leqslant \dim A$ puisque β est un fermé de A, on aurait $\dim A \geqslant n$, ce qui contredit i). Montrons que A ne sépare pas localement M. Soit a un point de A et V une carte de M centrée en a. On peut supposer que V est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$; $A \cap V$ est donc homéomorphe à un fermé F de $\mathbf{R}^n$ et $\dim F \leqslant n - 2$. Considérons $F' = F \cup \{ \infty \} \subset \mathbf{R}^n \cup \{ \infty \} = S^n$. $\dim F' \leqslant n-2$ car on ne peut augmenter la dimension d'un métrique séparable en lui ajoutant un seul point (cf. [2] page 19). Comme $\mathbf{R}^n \setminus F = S^n \setminus F'$, $\mathbf{R}^n \setminus F$ est connexe si et seulement si $\tilde{H}_0 (S^n \setminus F') = 0$ (où $\tilde{H}_0$ est l'homologie (singulière) réduite à coefficients entiers). Par la dualité d'Alexander [2]) $\tilde{H}_0 (S^n \setminus F')$ est isomorphe à $\check{H}^{n-1} (F' : \mathbf{Z})$ qui est nul puisque $\dim F' \leqslant n - 2$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 1. *Si $f : M \to N$ est un revêtement ramifié sur B d'ensemble de ramification A, alors A est une sous-variété localement plate de codimension 2 de M. De plus $f \mid A : A \longrightarrow B$ est un revêtement (non ramifié) fini de B.*

Démonstration. Si $a \in A$ et $b = f(a)$ les propriétés 3) et 4) ainsi que le fait que B est localement plat dans N assurent qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans N et un homéomorphisme $\psi : U \longrightarrow W \times D^2$ où $W \subset \mathbf{R}^{n-2}$ est la boule unité et $D^2 \subset \mathbf{C}$ le disque unité tels que $\psi (B \cap U) = W \times \{ 0 \}$, $\psi (b) = (0; 0)$ et que la composante connexe V de $f^{-1} (U)$ qui contient a soit telle que $V \setminus A$ soit connexe. $f \mid V \setminus A$ est donc un revêtement fini connexe de $U \setminus B$. Comme $U \setminus B$ est homéomorphe à $W \times D^{*2}$ (où D^{*2} désigne le disque ouvert privé de l'origine) la classification des revêtements montre qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : V \setminus A \longrightarrow W \times D^{*2}$ tel que

---

[1]) « Si X et Y sont métriques séparables (par exemple des variétés paracompactes) et $f : X \to Y$ est une application continue fermée telle que $\dim f^{-1}(y) \leqslant m$ pour tout point y de Y, alors $\dim X \leqslant m + \dim Y$ ».

[2]) Si K est un compact non vide de S^n, $K \neq S^n$ on a: $\check{H}^i (K) \simeq \tilde{H}_{n-i-1} (S^n \setminus K)$ pour $i > 0$, $\check{H}$ désignant la cohomologie de Cech.

$$\begin{array}{ccc} V \setminus A & \xrightarrow{\varphi} & W \times D^{*2}(x;\, z) \\ f \big\downarrow & & \big\downarrow g \quad \big\downarrow \\ U \setminus B & \xrightarrow{\psi} & W \times D^{*2}(x;\, z^k) \end{array} \qquad \text{commute}$$

pour un entier k positif bien défini.

LEMME 2. $f \mid V \cap A$ est injective (voir la démonstration plus loin).

Le lemme 2 admis on peut prolonger φ en un homéomorphisme $\bar{\varphi} : V \longrightarrow W \times D^2$ défini ainsi sur $V \cap A$: si $x \in V \cap A$ et $\psi \circ f(x) = (w;\, 0)$ où $w \in W$, on pose alors $\bar{\varphi}(x) = (w;\, 0)$. Montrons que c'est un homéomorphisme: $\bar{\varphi}$ est continue; en dehors de $A \cap V$ par définition et en $V \cap A$ également car si $x \in V \cap A$, $\bar{\varphi}(x) = (w;\, 0)$ pour un certain $w \in W$. Soit $W' \times \Delta$ un voisinage de $(w;\, 0)$ où W' est une boule de centre w dans W et Δ un sous-disque de D^2. On a $g(W' \times \Delta) = W' \times \Delta$ et donc

$$\bar{\varphi}^{-1}(W' \times \Delta) = f^{-1}\left(\psi^{-1}(W' \times \Delta)\right)$$

qui est bien un voisinage ouvert de x.

$\bar{\varphi}$ est injective car φ l'est et si $x, y \in V \cap A$ sont tels que $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(y)$ on a $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$ par le lemme 2.

$\bar{\varphi}$ est surjective car tous les points de $W \times D^{*2}$ sont atteints et si $(w;\, 0) \in W \times D^2$ $v_n = \varphi^{-1}(w;\, 1/n)$ $n \in \mathbf{N}$ est une suite de V, comme M est compacte elle a au moins une valeur d'adhérence v qui ne peut être que dans $V \cap A$. Par continuité $\bar{\varphi}(v) = (w;\, 0)$.

L'invariance du domaine (M est une variété de classe C^0) assure que $\bar{\varphi}$ est un homéomorphisme.

Ceci démontre le fait que A est une sous-variété localement plate de M de codimension 2.

Au-dessus d'un point de B il ne peut y avoir qu'un nombre fini de points de A (un discret dans un compact est fini), d'autre part la construction ci-dessus montre que $f \mid A$ est un homéomorphisme local et que les fibres ont même cardinal sur les composantes connexes de A. $f \mid A$ est donc un vrai revêtement.

L'entier k qui apparaît dans la construction est appelé l'*indice de ramification* de f au point a. On voit que cet indice est constant le long de chaque composante connexe de A.

Dans A il peut y avoir des points d'indice de ramification égal à 1 (f est alors un vrai revêtement au voisinage des composantes connexes qui

contiennent ces points); la condition 2) de la définition exige qu'il y ait au-dessus de chaque point de B au moins un point d'indice supérieur ou égal à 2.

Démonstration du Lemme 2. Il faut montrer que $f \mid V \cap A$ est injective. Par l'absurde, supposons qu'il existe x et $y \in V \cap A$ $x \neq y$ tels que $f(x) = f(y)$. Soient V_x et V_y des voisinages disjoints de x et y. La condition 3) de la définition assure qu'il existe un voisinage ouvert U' de $f(x) = f(y)$ dans U tel qu'une composante connexe S_x de $f^{-1}(U')$ soit contenue dans V_x et une autre S_y dans V_y. Quitte à restreindre U' on peut supposer que $\psi(U') = W' \times \Delta^2$ où $W' \subset W$ est une boule concentrique contenue dans W et $\Delta^2 \subset D^2$ est un disque centré en 0 de rayon plus petit. $\varphi(S_x \setminus A)$ et $\varphi(S_y \setminus A)$ sont alors deux composantes connexes non vides distinctes de $g^{-1}(W' \times \Delta^{*2})$ ce qui est absurde puisque $g^{-1}(W' \times \Delta^{*2}) = W' \times \Delta^{*2}$ est connexe.

Existence et unicité des revêtements ramifiés

Proposition 2 (Existence). *Soit N une variété de dimension $n \geqslant 2$ et $B \subset N$ une sous-variété localement plate de codimension 2.*

$p : Y \longrightarrow N \setminus B$ un revêtement non *ramifié fini, alors il existe une variété compacte M de dimension n, une sous-variété $A \subset M$ localement plate de codimension 2 et une application $f : M \longrightarrow N$ telle que : f soit un revêtement ramifié sur une partie B' de B et que $f \mid M \setminus A : M \setminus A \longrightarrow N \setminus B$ soit un revêtement isomorphe à p.*

Remarque. Il se peut que p puisse s'étendre en un revêtement *non* ramifié sur certaines composantes connexes de B, B' est alors une partie propre de B ou même sur tout B, B' est alors vide et f est un vrai revêtement.

Démonstration. Soit $b \in B$. Soit U un voisinage ouvert de b dans N et $\psi : U \longrightarrow W \times D^2$ un homéomorphisme où $W \subset \mathbf{R}^{n-2}$ est la boule-unité et $D^2 \subset \mathbf{C}$ le disque-unité et tel que $\psi(b) = (0; 0)$ $\psi(B \cap U) = W \times \{0\}$.

Soit $U^* = \psi^{-1}(W \times D^{*2})$. $p \mid p^{-1}(U^*) \longrightarrow U^*$ est un revêtement non ramifié fini de U^*. Soit $p^{-1}(U^*) = V_i \cup \ldots V_r$ sa décomposition en composantes connexes. $p \mid V_i \longrightarrow U^*$ est un revêtement fini connexe. Comme W est contractile il existe des homéomorphismes $\varphi_i : V_i \to W \times D^{*2}$ tels que les diagrammes