Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRODUIT DES CONJUGUÉS EXTÉRIEURS AU CERCLE UNITÉ D'UN ENTIER ALGÉBRIQUE

Autor: Waldschmidt, Michel

Kapitel: Polynômes non réciproques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51068

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Cette question a été posée par Lehmer en liaison avec la recherche de grands nombres premiers (cf. [S]). Elle apparaît aussi en théorie ergodique (voir également [S]). Enfin elle est apparentée à la conjecture de Pisot: si $\theta > 1$ est un nombre réel tel qu'il existe $\lambda > 0$ pour lequel $\| \lambda \theta^n \| \to 0$ (où $\| . \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche), alors θ est un nombre de Pisot. Le lien avec le problème de Lehmer se fait par l'intermédiaire de l'ensemble E des limites $\lim a_{n+1}/a_n$, pour $(a_0, a_1, \ldots)$ suite de Pisot:

$$a_{n+1} = N(a_n^2/a_{n-1}), \quad n \geqslant 1,$$

où $N(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, et a_0, a_1 sont des entiers, $0 < a_0 < a_1$. On sait que E est dense dans $[1, \infty]$, et que E contient l'ensemble S des nombres de Pisot et celui T des nombres de Salem. Si on avait $E = S \cup T$, on en déduirait d'une part $\inf T = 1$, ce qui répond à la question de Lehmer, et on en déduirait d'autre part la conjecture de Pisot. Cependant D. Boyd [B2], [B3] a obtenu des résultats qui suggèrent plutôt $E \neq S \cup T$.

Il est intéressant de noter qu'en 1936, après avoir donné à Paris un exposé sur la solution par Schneider du 7e problème de Hilbert sur la transcendance de a^b, C. L. Siegel signala à C. Pisot la question de D. H. Lehmer. Quarante ans après (comme nous allons le voir), la méthode de Schneider permet à Stewart et Dobrowolski de faire des progrès importants vers une réponse négative à la question de Lehmer.

Polynômes non réciproques

En 1970, C. J. Smyth a montré que si le polynôme minimal de α n'est pas réciproque (et $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$), alors $M(\alpha) \geqslant \theta_0$ où θ_0 est la racine réelle de $X^3 - X - 1$. Il en déduit le résultat de Siegel (1944): $\theta_0 = 1,32471795\ldots$ est le plus petit nombre de Pisot (l'existence du plus petit nombre de Pisot résulte du fait, démontré par Salem en 1944, que l'ensemble S est fermé). Il en déduit aussi un résultat de Chamfy (1957): si α est un entier algébrique non réel vérifiant $|\alpha| = |\bar{\alpha}| > 1$ et $|\alpha_j| < 1$ pour α_j conjugué de α avec $\alpha_j \neq \alpha$ et $\alpha_j \neq \bar{\alpha}$, alors $|\alpha| \geqslant \sqrt{\theta_0}$. Enfin si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ a un polynôme minimal non réciproque, on a

$$\max |\alpha_j| \geqslant 1 + \frac{\log \theta_0}{d}.$$

La question de Lehmer est donc résolue pour les polynômes non réciproques. Néanmoins l'étude de l'ensemble des valeurs de $M(\alpha)$ pour α non réciproque n'est pas terminée. Le plus petit point limite connu [B1, B2, B4] correspond aux polynômes $X^n + X + 1$:

$$\begin{aligned}\beta &= \exp \int_0^1 \int_0^1 \log \left| e^{2i\pi t_1} + e^{2i\pi t_2} + 1 \right| dt_1\, dt_2 \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/3} -\log \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) dt \right\} \\ &= 1{,}38135 \ldots\end{aligned}$$

On ignore si ce nombre est algébrique ou transcendant (cf. [B2]).

Remarque. Pour $P \in \mathbf{C}\,[z_1, \ldots, z_n]$, Mahler définit

$$M(P) = \exp \int_0^1 \ldots \int_0^1 \log \left| P(e^{2i\pi t_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n}) \right| dt_1 \ldots dt_n .$$

La formule de Jensen montre que $M(\alpha) = M(P)$ si $P \in \mathbf{Z}\,[X]$ est le polynôme minimal de α. D'autre part soit $P(X, Y) \in \mathbf{C}\,[X, Y]$, et, pour $k \geqslant 0$, soit $Q_k(X) = P(X, X^k) \in \mathbf{C}\,[X]$. Alors on a (cf. [B1] théorème 2) $M(Q_k) \to M(P)$ quand $k \to \infty$.

Polynômes réciproques

D. W. Boyd a fait très récemment une recherche sur ordinateur qui lui a permis de vérifier que $M(\alpha) \geqslant \alpha_0$ si α est un nombre algébrique (non nul et non racine de l'unité) de degré $\leqslant 16$, ou bien de degré $\leqslant 26$ et de hauteur $\leqslant 1$ (i.e. dont le polynôme minimal a pour coefficients 0, 1 ou -1). D'autre part le plus petit point limite de l'ensemble des $M(\alpha)$ qu'il connaisse est

$$\begin{aligned}&M\left(Y^2(X+1) + Y(X^2+X+1) + X^2 + 1\right) \\ &= \exp \int_0^1 \int_0^1 \log \left| \zeta^2 (1+z^{-1}) + \zeta (z+1+z^{-1}) + z + 1 \right| d\theta\, dt \\ &= 1{,}255425 \ldots\end{aligned}$$

(où on a écrit $\zeta = e^{2i\pi\theta}$, $z = e^{2i\pi t}$), correspondant par exemple aux polynômes

$$X^{2n}(1+X^{-1}) + X^n(X+1+X^{-1}) + X + 1 .$$