Analogue elliptique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Au lieu d'utiliser le polynôme minimal de f on peut utiliser n'importe quel polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, pourvu que $F(\alpha^p) \neq 0$. On aura une bonne minoration de la norme de $F(\alpha^p)$ si f (ou mieux, une puissance de f) divise F.

LEMME 2. *Soient α un entier algébrique non nul et non racine de l'unité, f son polynôme minimal, H sa hauteur, T un entier, p un nombre premier, et $F \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme de degré $< L$ tel que f^T divise F et $F(\alpha^p) \neq 0$. Alors*

$$M(\alpha)^{Lp}\ (LH)^d \geqslant p^{dT}\ .$$

En effet, on a

$$|N(F(\alpha^p))| \leqslant (L\,H)^d\ M(\alpha)^{Lp}$$

et p^{dT} divise la norme de $F(\alpha^p)$.

Il reste à trouver un polynôme F vérifiant les hypothèses du lemme 2. On peut bien sûr choisir $F = f^T$, mais on ne trouve alors rien de mieux que le lemme 1. Le miracle vient de la méthode de Thue: en utilisant le lemme de Siegel, on peut construire un polynôme F tel que f^T divise F, et tel que la hauteur de F ne soit pas trop grande:

$$H(F) \leqslant 2 + \left(2^T\ L^{T^2 d} M(\alpha)^{TL}\right)^{1/(L-dT)}\ ,$$

pourvu que $L \geqslant 2\,d\,T$. Ainsi le degré de F risque d'être plus grand que celui de f^T, mais on gagne une bonne majoration de la hauteur de F. On choisit $T = [50\,(\log d)\,(\log\log d)^{-1}]$, et $L = dT^2$. On montre qu'il existe un nombre premier p dans l'intervalle $[T^2, 6\,T^2 \log T]$ tel que $F(\alpha^p) \neq 0$. On en déduit $\log M(\alpha) \geqslant (8\,T^3)^{-1}$ pour $d \geqslant 16$, ce qui démontre le théorème.

Dans un travail récent [D], E. Dobrowolski a obtenu des minorations de $M(P)$ pour $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P(0) \neq 0$ et P non produit de polynômes cyclotomiques, en fonction seulement du nombre de coefficients non nuls de P.

ANALOGUE ELLIPTIQUE

Soit E une courbe elliptique définie sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques. Soit $\hat{h}$ la hauteur de Néron Tate sur $E(\overline{\mathbf{Q}})$. M. Anderson a démontré dans le cas C.M. que pour tout $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$ non de torsion,

$$\hat{h}(P) > c_1\ D^{-4}(\log D)^{-3}\ ,$$

où c_1 est une constante positive ne dépendant que de g_2, g_3. Cet énoncé a été récemment amélioré par D. W. Masser (résultat annoncé en Mai 1979 aux journées sur les fonctions abéliennes et les nombres transcendants):

THÉORÈME (D. W. Masser). *Soit E une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ Il existe $c_2 > 0$ tel que si $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$ n'est pas de torsion, alors*

$$\hat{h}(P) > c_2 \; D^{-10} (\log D)^{-6} .$$

De plus si E a une multiplication complexe

$$\hat{h}(P) > c_2 \; D^{-3} (\log D)^{-2} .$$

REMARQUE FINALE

Soit α un *nombre* algébrique de polynôme minimal

$$a_0 X^d + \ldots = a_d = a_0 \prod_{j=1}^{d} (X - \alpha_j) .$$

On définit

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{j=1}^{d} \max(1, |\alpha_j|) .$$

Le résultat suivant, implicite chez Feldman, a été explicité par D. Bertrand:

$$M(\alpha) = \prod_{v} \max(1, |\alpha|_v)$$

où v décrit l'ensemble des valeurs absolues convenablement normalisées de $\mathbf{Q}(\alpha)$. La hauteur logarithmique absolue de α introduite par A. Weil peut alors être définie par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]} \log M(\alpha) .$$

Dans les démonstrations de transcendance on a le choix entre plusieurs définitions de la « taille ». Il est maintenant généralement admis (depuis peu) que le meilleur choix est $h(\alpha)$.