SUR LE THÉORÈME D'APPROXIMATION DE RUNGE

Autor(en): **Auderset, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-51070

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LE THÉORÈME D'APPROXIMATION DE RUNGE

par Claude AUDERSET

Cette note a pour but d'unifier et de compléter les diverses versions connues en dimension 1 du théorème d'approximation de Runge.

L'énoncé originel de Runge (1885) est le suivant: *toute fonction holomorphe f sur un ouvert U de la sphère de Riemann possède une approximation (uniforme sur les compacts) par des fonctions rationnelles.* Ceci reste correct lorsqu'on impose certaines conditions aux pôles des approximations, par exemple, quand U ne contient pas le point à l'infini, f possède une approximation polynomiale (pas de pôle à l'infini). Le meilleur résultat connu dans cette direction est dû à Walsh [6, Theorem 17, p. 26]: *pour que toute fonction holomorphe f sur U possède une approximation par des fonctions rationnelles n'ayant de pôles que dans un ensemble donné P, il faut et il suffit que chaque « trou » découpé par U dans la sphère contienne un point de P.* (Un trou est une composante connexe du complémentaire de U et l'on suppose que P ne rencontre qu'un nombre fini de trous.)

La version la plus célèbre du théorème d'approximation en dimension 1 est celle de Behnke-Stein [1, Satz 6, p. 445]: *pour que les fonctions holomorphes sur un ouvert U d'une surface de Riemann ouverte X soient approximables par des fonctions holomorphes sur X, il faut et il suffit qu'aucune composante connexe du complémentaire de U ne soit compacte* (cf. aussi [4, p. 239-241], où d'autres références sont données). Ces mêmes auteurs ont encore démontré [1, Satz 13, p. 456]: *chaque fonction holomorphe sur un ouvert U de la surface de Riemann ouverte X possède une approximation par des fonctions méromorphes sur X n'ayant de pôles que sur la frontière de U.* A noter que les versions modernes négligent le cas compact, bien qu'à l'origine le théorème de Runge ait été donné pour la sphère.

Le théorème général suivant est valable pour une surface de Riemann quelconque X. Même lorsque X est la sphère ou lorsque X est ouverte (seuls cas considérés jusqu'ici), il est plus précis que les résultats qui viennent d'être rappelés.

THÉORÈME. *Soient X une surface de Riemann, ξ un fibré en droites holomorphe sur X, U un ouvert de X, de complémentaire A, et P une*

partie de A. Lorsque X est compacte, on suppose P non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *Toute section holomorphe de ξ au-dessus de U peut être approchée, uniformément sur les compacts de U, par des sections méromorphes de ξ au-dessus de X à pôles contenus dans P seulement.*
2) *Tout compact non vide de A ouvert dans A contient un point de P.*
3) *Le complémentaire $A \setminus \bar{P}$ de l'adhérence de P dans A n'a pas de composante connexe compacte.*
4) *L'inclusion de U dans $X \setminus \bar{P}$ induit un monomorphisme $H_1(U) \to H_1(X \setminus \bar{P})$, où H_1 désigne l'homologie singulière entière (par exemple).*
5) *Toute section holomorphe de ξ au-dessus de U peut être approchée, uniformément sur les compacts de U, par des sections holomorphes de ξ au-dessus de $X \setminus \bar{P}$.*

Remarque. Lorsque les composantes connexes de A sont ouvertes dans A, par exemple lorsqu'elles sont en nombre fini, la condition 2) peut être remplacée par:

toute composante connexe compacte de A contient un point de P.

En effet, les compacts de A ouverts dans A sont alors les réunions finies de composantes connexes compactes de A.

Equivalence des conditions topologiques 2), 3) et 4)

Lemme. *Pour qu'un espace localement compact Y n'ait pas de composante connexe compacte, il faut et il suffit que Y ne contienne pas de compact ouvert non vide.*

C'est un conséquence des deux énoncés suivants:

— Une composante connexe d'un compact ouvert dans Y est une composante connexe compacte de Y.

— Toute composante connexe compacte de Y est contenue dans un compact ouvert [2, TG II, 32, Corollaire de la Proposition 6].

Comme tout compact ouvert dans A qui coupe $\bar{P}$ coupe déjà P, on peut remplacer P par $\bar{P}$ dans la condition 2), qui se reformule donc: il n'y a pas

de compact non vide ouvert dans $A \setminus \bar{P}$. D'après le lemme, ceci équivaut à la condition 3).

Pour vérifier l'équivalence de 3) et 4), considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A \setminus \bar{P}$ de $X \setminus \bar{P}$

$$H_c^0 (X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^0 (A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^1 (U, \mathbf{Z}) \to H_c^1 (X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190].

Ici, $\mathbf{Z}$ désigne le faisceau constant et, pour un espace topologique Y, $H_c^0 (Y, \mathbf{Z})$ est formé des fonctions localement constantes sur Y à support compact. Le support d'un élément de $H_c^0 (Y, \mathbf{Z})$ est un compact ouvert dans Y. D'après le lemme, lorsque Y est localement compact, $H_c^0 (Y, \mathbf{Z}) = 0$ si et seulement si Y n'a pas de composante connexe compacte. Ceci montre d'abord que $H_c^0 (X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) = 0$. Ensuite, que la condition 3) équivaut à la nullité de $H_c^0 (A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$ ou encore, d'après l'exactitude de la suite précédente, à l'injectivité de $H_c^1 (U, \mathbf{Z}) \to H_c^1 (X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$. Par dualité de Poincaré,

$$H_c^1 (U, \mathbf{Z}) \cong H_1 (U) \text{ et } H_c^1 (X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \cong H_1 (X \setminus \bar{P}),$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence entre 3) et 4).

Utilisation de la dualité de Serre

Désignons par $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs effectifs sur X à support contenu dans P. Pour $D \in \mathscr{D}$, soient $\xi (D)$ le produit tensoriel de ξ avec le fibré en droites associé à D et $\tilde{\xi} (D) = \operatorname{Hom} (\xi (D), \kappa)$, où κ est le fibré cotangent de X. Les sections holomorphes de $\xi (D)$ sont interprétés comme sections méromorphes f de ξ telles que $\operatorname{div} f \geqslant -D$ et les sections holomorphes de $\tilde{\xi} (D)$ comme sections holomorphes ω de $\tilde{\xi} = \operatorname{Hom} (\xi, \kappa)$ telles que $\operatorname{div} \omega \geqslant D$.

Considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé A de X

$$\Gamma_c (X, \tilde{\xi} (D)) \to \Gamma_c (A, \tilde{\xi} (D)) \to H_c^1 (U, \tilde{\xi}) \to H_c^1 (X, \tilde{\xi} (D))$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190], où Γ_c désigne les sections à support compact du faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites.

Lorsque la surface X est ouverte (resp. compacte), $\Gamma_c\big(X, \tilde{\xi}(D)\big) = 0$ pour tout D (resp. pour D assez grand). D'autre part, par dualité de Serre [5, Théorème 3, p. 21 et Théorème 4, p. 22],

$$H_c^1(U, \tilde{\xi}) \cong \Gamma(U, \xi)' \text{ et } H_c^1\big(X, \tilde{\xi}(D)\big) \cong \Gamma\big(X, \xi(D)\big)',$$

où $\Gamma(\ ,\ )'$ désigne le dual pour la topologie de la convergence compacte de l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites. On arrive donc à la suite exacte

$$0 \to \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \to \Gamma(U, \xi)' \to \Gamma\big(X, \xi(D)\big)'$$

pour D assez grand.

Si $M(D)$ dénote l'image de $\Gamma\big(X, \xi(D)\big)$ par restriction dans $\Gamma\big(U, \xi(D)\big)$ et $M(D)^\perp$ l'espace des formes linéaires continues sur $\Gamma\big(U, \xi(D)\big)$ s'annulant sur $M(D)$, on peut encore écrire $\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \cong M(D)^\perp$ pour D assez grand.

Les propriétés fonctorielles de l'homomorphisme de jonction $\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \to H_c^1(U, \tilde{\xi})$ et de l'isomorphisme de Serre $H_c^1\big(X, \tilde{\xi}(D)\big) \cong \Gamma\big(X, \xi(D)\big)'$ montrent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D_1)\big) & \xrightarrow{\sim} & M(D_1)^\perp \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D_2)\big) & \xrightarrow{\sim} & M(D_2)^\perp \end{array}$$

commute pour $D_1 \leqslant D_2$. Prenant l'intersection (ou, si l'on veut, la limite projective) des deux membres de l'isomorphie $\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \cong M(D)^\perp$, on arrive à

$$\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \cong \bigcap_{D \in \mathscr{D}} M(D)^\perp = M^\perp,$$

où $M = \bigcup_{D \in \mathscr{D}} M(D)$ est formé des restrictions à U des sections méromorphes de ξ au-dessus de X à pôles dans P.

La condition 1) du théorème est que M soit dense dans $\Gamma(U, \xi)$ ou encore, d'après Hahn-Banach, que l'orthogonal $M^\perp$ soit nul:

La condition 1) *est équivalente à*

1') $$\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) = 0\,.$$

Equivalence des conditions 2) et 1′)

Le support de $\omega \in \bigcap_{D \in \mathscr{D}} \Gamma_c(A, \xi(D))$ est un compact de A, ouvert dans A d'après le principe du prolongement analytique et disjoint de P puisque ω a un zéro d'ordre arbitraire en chaque point de P. Ainsi, 2) implique 1′). Conséquence:

Lorsque la surface X est ouverte, $\Gamma(X, \xi) \neq 0$.

Pour le voir, on utilise 4) $\Rightarrow$ 1) avec $P = \varnothing$, en prenant pour U un ouvert de X isomorphe par exemple à un disque du plan complexe, de sorte que $\Gamma(U, \xi) \neq 0$.

Montrons maintenant par contraposition que 1′) implique 2). Soit K un compact non vide de A ouvert dans A et disjoint de P et soit V un voisinage ouvert de K dans X. On peut supposer V distinct de X lorsque X est compacte, car alors P est non vide, donc $K \neq X$. Soit V_0 une composante connexe de V qui rencontre K. Comme V_0 est une surface de Riemann ouverte, il existe α non nul dans $\Gamma(V_0, \tilde{\xi})$. Prolongeant α à V et restreignant la section ainsi obtenue à K, on arrive à un β non nul dans $\Gamma(K, \tilde{\xi})$. On construit alors un élément non nul γ de $\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \Gamma_c(A, \xi(D))$ en prenant $\gamma \mid K = \beta$ et $\gamma \mid A \setminus K = 0$.

L'équivalence entre 5) et 3) se ramène à l'équivalence entre 1) et 3) en remplaçant X par $X \setminus \bar{P}$ et P par $\varnothing$ (que $X \setminus \bar{P}$ ne soit pas nécessairement connexe ne crée pas de difficulté).

Remarque. Les détails techniques de la preuve donnée ont peut-être masqué le fait suivant: le seul théorème d'analyse complexe utilisé a été la dualité de Serre. Ceci apparaît plus clairement si l'on se restreint au cas $P = \varnothing$ (i.e. au théorème d'approximation de Behnke-Stein). De ce point de vue, il serait souhaitable d'avoir un traitement direct de la dualité de Serre en dimension 1 dans le cas ouvert, indépendant du fait qu'une surface de Riemann ouverte est une variété de Stein.

LITTÉRATURE

[1] BEHNKE, H. und K. STEIN. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Annalen 120* (1948), pp. 430-461.
[2] BOURBAKI, N. *Topologie générale. Chap. II, Structures uniformes.* Hermann, Paris, 1971.
[3] GODEMENT, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1958.
[4] NARASIMHAN, R. *Analysis on real and complex manifolds.* Masson & Cie, Paris, 1973.
[5] SERRE, J.-P. Un théorème de dualité. *Comm. Math. Helv. 29* (1955), pp. 9-26.
[6] WALSH, J. L. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* AMS Colloquium publications, XX, 3rd ed. 1960.

(Reçu le 14 septembre 1979)

Claude Auderset

Institut de Mathématiques
Université de Fribourg
CH-1700 Fribourg