3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

elle est croissante sur l'intervalle $[0, t(x)[$ *et décroissante sur l'intervalle* $]t(x), +\infty[$.

(iv) *pour tout réel* ξ *satisfaisant à l'inégalité* $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ *et tout réel positif* ε, *on a :*

$$\int_{|t-x|>x^{\xi}} \varphi(x,t)\,dt = O(\exp\{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) *on a pour* x *infini*

$$\int_0^{\infty} \varphi(x,t)\,dt = 1 + O(e^{-x}).$$

3. Démonstration du théorème 2

E et g gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour x réel positif et m entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m,x) = \text{card}\,\{n \leqslant x : g(n) = m\}.$$

Halàsz a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse $y(x) \to +\infty$, pour tout réel δ satisfaisant à $0 < \delta \leqslant 1$,

$$N(m,x) = x\,\varphi(y,m)\left\{1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right\}, \tag{4}$$

uniformément pour $\delta \leqslant \frac{m}{y} \leqslant 2 - \delta$ et $y \geqslant 2$.

Notant $\mathscr{B} = g^{-1}(\mathscr{A})$, on a pour tout x positif

$$B(x) := \text{card}\,\{n \leqslant x : n \in \mathscr{B}\} = \sum_{m \in \mathscr{A}} N(m,x).$$

Fixons alors un nombre réel ξ dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on a:

$$B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathscr{A} \\ |m-y| \leq y^{\xi}}} N(m,x) + O\Big(\sum_{|m-y|>y^{\xi}} N(m,x)\Big). \tag{5}$$

Dans le cas particulier où $\mathscr{A}$ est la suite de tous les entiers on a d'une part $B(x) = [x]$ et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned}\sum_{|m-y|\leq y^{\xi}} N(m,x) &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\sum_{|m-y|\leq y^{\xi}} \varphi(y,m) \\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\left(\int_{|t-y|\leq y^{\xi}} \varphi(y,t)\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right) \\ &= x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right),\end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite $\mathscr{A}$ le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x\left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right) = o(x)\,.$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{B(x)}{x} &= \left(1+O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right)\right)\sum_{\substack{m\in\mathscr{A} \\ |m-y|\leq y^{\xi}}} \varphi(y,m) + o(1) \\ &= (1+o(1))\left(\int_0^{\infty} \varphi(y,t)\,dA(t) + o(1)\right) + o(1)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

4. Le résultat abélien

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

Lemme 2. *Soit* A *une fonction mesurable complexe vérifiant* (1). *Alors la relation* (1) *a lieu uniformément en* c *sur tout compact.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a $\alpha = 0$ dans (1).