Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROCÉDÉ DE SOMMATION DE BOREL ET LA RÉPARTITION DU NOMBRE DES FACTEURS PREMIERS DES ENTIERS

Autor: Tenenbaum, Gérald

Kapitel: 5. Le résultat taubérien

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51071

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

D'autre part, puisqu'aucun des x_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) n'appartient à l'intervalle $[x-1, x]$ la formule de la moyenne implique

$$\forall k\,(-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \;\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t)\right|$$
$$\leqslant \varphi(x, x_{k+i}) \sup_{x_k \leqslant t \leqslant x_{k+1}} |A(t) - A(x_{k+i})|$$

avec $i = 1$ si $k \geqslant 1$ et $i = 0$ si $k \leqslant -2$.

D'après (6) on a donc:

$$\forall k\,(-m \leqslant k \leqslant m-1, k \neq -1, 0) \;\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t)\right|$$
$$= o\left(\sqrt{x}\,\varphi(x, x_{k+i})\right)$$

d'où, en utilisant l'assertion (i) du lemme 1,

$$\sum_{\substack{-m \leqslant k \leqslant m-1 \\ k \neq -1,0}} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x,t)\,dA(t)\right| \tag{10}$$
$$= o\left(\sum_{\substack{-m \leqslant k \leqslant m-1 \\ k \neq -1,0}} \exp\left\{-\frac{k^2}{2}(1+o(1))\right\}\right)$$
$$= o(1)\,.$$

En reportant (10) et (9) dans (8), on obtient $I_1 + I_3 = o(1)$, ce qui achève la démonstration.

5. Le résultat taubérien

Dans cette section, nous nous proposons d'établir le théorème 4. Nous supposerons, dans toute la démonstration, A réelle et croissante; grâce au théorème 3, le cas général se déduit aisément de ce pas particulier.

Nous noterons $\mathscr{V}_+$ l'ensemble des fonctions réelles croissantes, définies sur l'ensemble des réels positifs ou nuls et prolongées par 0 sur l'ensemble des réels négatifs.

Les méthodes de démonstration que nous utiliserons sont fondées sur des idées de Hardy et Littlewood ([6], [7]) dont on trouvera un exposé dans le chapitre 9 de [5]. En particulier, le point crucial consiste à appliquer au bon moment le théorème de Vitali, que nous énonçons pour mémoire:

Soit $\mathcal{O}$ un domaine du plan complexe et (f_n) une famille de fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$, bornée pour la topologie de la convergence sur tout compact de $\mathcal{O}$ et convergeant vers une fonction holomorphe f, définie sur $\mathcal{O}$, sur une suite de points ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{O}$. Alors (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathcal{O}$.

LEMME 3. *Pour toute fonction A de $\mathcal{V}_+$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\int_0^\infty \varphi(x,t)\,dA(t) = \alpha + o(1) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{h^2}{2}\right\} dA(x+h\sqrt{x}) = \alpha + o(1)\,. \tag{11}$$

Dans [6], Hardy et Littlewood ont montré l'équivalence des conditions (3) et (11) dans le cas où $A(t)$ est la fonction sommatoire d'une suite $a_n = o(\sqrt{n})$; Hyslop [8] a généralisé ce résultat au cas où $a_n = O(n^K)$ pour un réel arbitraire K. Bien que le résultat du lemme 3 ne soit pas une conséquence de ces travaux antérieurs, la démonstration ne met en œuvre aucun moyen nouveau; nous nous contenterons d'exposer les grandes lignes de la preuve de l'implication (3) $\Rightarrow$ (11), le lecteur n'aura aucune peine, s'il le désire, à compléter la démonstration.

Comme la mesure $dA(t)$ est positive on a

$$\int_x^{x+\sqrt{x}} \varphi(x,t)\,dA(t) \leqslant \int_0^\infty \varphi(x,t)\,dA(t) = O(1)\,,$$

et comme, d'après le lemme 1, il existe une constante positive a telle que l'on ait pour x assez grand et t dans $[x, x+\sqrt{x}]$, $\varphi(x,t) \geqslant \dfrac{a}{\sqrt{x}}$, on voit que

$$A(x+\sqrt{x}) - A(x) = O(\sqrt{x})\,.$$

Maintenant il est facile d'en déduire que l'on a uniformément pour $y \geqslant \sqrt{x}$

$$A(x+y) - A(x) = O(y)\,, \tag{12}$$

et en particulier

$$A(x) = O(x)\,. \tag{13}$$

Soit alors ξ un réel fixé dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$; on déduit de (13) et des estimations du lemme 1 la majoration

$$\int_{|t-x|>x^{\xi}} \varphi(x,t)\, dA(t) = o(1)$$

d'où finalement:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x,t)\, dA(t) = \int_{|t-x|<x^{\xi}} \varphi(x,t)\, dA(t) + o(1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{|t-x|<x^{\xi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) + R_1$$

$$+ R_2 + o(1)$$

avec

$$R_1 = O\left(\frac{1}{x}\int_{|t-x|<x^{\xi}} \frac{1+|t-x|}{\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t)\right)$$

et

$$R_2 = O\left(\frac{1}{x}\int_{|t-x|<x^{\xi}} \frac{|t-x|^3}{x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t)\right).$$

Comme $dA(t)$ est positive et que les fonctions $h \mapsto |h|\, e^{-h^2/2}$ et $h \mapsto |h|^3\, e^{-h^2/2}$ sont bornées sur la droite réelle, on voit que R_1 et R_2 sont $O\left(\frac{A(x+x^{\xi}) - A(x-x^{\xi})}{x}\right)$, c'est-à-dire $o(1)$ d'après (12).

En remarquant finalement que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x|>x^{\xi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) = o(1),$$

on obtient la conclusion souhaitée.

Le résultat suivant est l'analogue d'un théorème de Hardy et Littlewood ([6], théorème 4.3).

LEMME 4. *Soit A une fonction de $\mathscr{V}_+$. Si l'intégrale*

$$\hat{A}(y) = y \int_0^{\infty} e^{-ty}\, dA(t) \tag{14}$$

converge pour $y > y_o$, *alors elle définit une fonction analytique de* y *sur l'intervalle* $]y_o, +\infty[$, *on a pour tout* $y > y_o$ *et tout entier non négatif* n

$$\frac{d^n \hat{A}}{d y^n}(y) = \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-ty} (n - ty)\, dA(t)$$

et, pour tout réel positif k, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'intégrale* (14) *est convergente pour tout réel positif* y *et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n A}{dy^n}(k) = \alpha \tag{15}$$

(ii) *on a pour* x *infini*

$$\sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{kh^2}{2}\right\} dA(x + h\sqrt{x}) = \alpha + o(1) \tag{16}$$

Démonstration. Les deux premières assertions concernant l'intégrale (14) constituent un résultat classique sur la transformation de Laplace-Stieltjes (voir par exemple Widder [10], chapitre II, §5).

Supposons maintenant que A satisfasse à la condition (i). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k) &= \lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{\nu} \frac{(-k)^n}{n!} \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-tk} (n - tk)\, dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \sum_{n=0}^{\nu} (tk - n) \frac{(kt)^{n-1}}{n!}\, dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \left\{ -\sum_{n=1}^{\nu} \frac{(kt)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\nu} \frac{(kt)^n}{n!} \right\} dA(t) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} k \int_0^\infty e^{-tk} \frac{(kt)^\nu}{\nu!}\, dA(t) .
\end{aligned}$$

En posant $\psi(x, t) = k\, \varphi(tk, \nu)$ pour $\nu = [k\, x]$, on voit donc que (15) équivaut à

$$\int_0^\infty \psi(x, t)\, dA(t) = \alpha + o(1) . \tag{17}$$

Un réel ξ étant fixé dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$, on vérifie que l'on a pour $|t - x| < x^\xi$

$$(18) \qquad \psi(x,t) = \sqrt{\frac{k}{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{k}{2}\cdot\frac{(t-x)^2}{x}\right\}\left(1+O\left(\frac{|t-x|^3}{x^2}\right)\right).$$

Comme (17) implique que l'intégrale $\int_x^{x+\sqrt{x}} \psi(x,t)\, dA(t)$ est bornée on en déduit, comme dans la démonstration du lemme 3, la majoration

$$(19) \qquad A(x) = O(x);$$

cela implique

$$\int_{|t-x| \geqq x^\xi} \psi(x,t)\, dA(t) = o(1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{|t-x| \geqq x^\xi} \exp\left\{-\frac{k}{2}\frac{(t-x)^2}{x}\right\} dA(t) = o(1)$$

et finalement (16), en utilisant (18) et le changement de variable $t = x + h\sqrt{x}$.

Pour établir l'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i), il suffit de remonter les calculs précédents, après avoir remarqué que (16) implique (19) et donc la convergence de l'intégrale (14) pour tout y positif.

LEMME 5. *Soit A une fonction de $\mathscr{V}_+$.*

Si A vérifie (16) *pour un nombre réel positif k, il en est de même pour tout nombre k' satisfaisant à l'inégalité $0 < k' < k$.*

Démonstration. On utilise l'équivalence énoncée au lemme 4; le résultat est une conséquence immédiate du théorème suivant, dû à Hardy et Littlewood [6]:

Si la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

converge en un point x_0 de son cercle de convergence et si θ appartient à $]0, 1[$, *alors la série de Taylor de $f(\theta x_0 + (1-\theta)\, x_0)$, soit*

$$(20) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(\theta x_0)\,\{(1-\theta)\, x_0\}^n,$$

converge également vers $f(x_0)$.

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème à la série entière définie pour $|x| < 1$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{d^n \hat{A}(k)}{dy^n} x^n$$

qui converge en $x_o = 1$.

Comme $\hat{A}$ est analytique sur $]0, +\infty[$, on a pour tout x dans $]0, 1[$

$$f(x) = \hat{A}(k(1-x))$$

et donc, en posant $k' = k(1-\theta)$,

$$\frac{d^n f}{dx^n}(\theta) = (-k)^n \frac{d^n \hat{A}}{dy^n}(k') .$$

Le résultat en découle, en remplaçant dans (20).

Nous pouvons maintenant aborder la dernière étape de la démonstration du théorème 4.

Soit donc A une fonction de $\mathscr{V}_+$ satisfaisant à (3). Nous allons montrer que la suite de fonctions $(g_m)_{m \geq 1}$ définie par

$$(\forall m \in \mathbf{N}^*, \ \forall t > 0) \qquad g_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \{ A(m + t\sqrt{m}) - A(m - t\sqrt{m}) \}$$

converge simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$; la croissance de A permettra alors d'en déduire (1).

D'après les lemmes 3 et 5, on a, pour tout réel k de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, lorsque m tend vers l'infini

$$(21) \qquad \sqrt{\frac{k}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-kh^2\} dA(m + h\sqrt{m}) = \alpha + o(1) .$$

De plus, comme la mesure $dA(t)$ est positive, la suite des fonctions définies sur le demi-plan $\mathscr{K} = \{z \in \mathbf{C} : Re\, z > 0\}$ par

$$(22) \qquad f_m(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-zh^2\} dA(m + h\sqrt{m})$$

est bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathscr{K}$. Comme $f_m(z)$ tend vers α pour $z = k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, le théorème de Vitali implique

$$(23) \qquad (\forall z \in \mathscr{K}) \qquad f_m(z) = \alpha + o(1) .$$

En intégrant par parties l'intégrale figurant au second membre de (22), la relation (23) devient:

$$(\forall z \in \mathscr{K}) \qquad \int_0^\infty h\, g_m(h) \exp\{-zh^2\}\, dh = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2z^{3/2}} + o(1).$$

Soit y un réel positif; prenons $z = y^2$ et effectuons le changement de variable $t = hy$, on obtient:

$$(24) \qquad (\forall y > 0) \qquad \int_0^\infty t\, g_m\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}\, dt = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2y} + o(1).$$

En particulier, il existe une constante positive M telle que l'on ait pour m assez grand

$$\int_0^\infty t\, g_m(t)\, e^{-t^2}\, dt \leqslant M.$$

Comme g_m est positive et croissante en t, cela implique

$$(\forall \tau > 0) \qquad g_m(\tau) \leqslant M\left\{\int_\tau^\infty te^{-t^2}\, dt\right\}^{-1} = 2Me^{\tau^2}.$$

La famille des fonctions $t \to tg_m\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}$ est donc, *pour chaque y fixé supérieur à* 1, majorée par une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue.

Maintenant, de toute suite d'entiers tendant vers l'infini, on peut extraire, par un procédé diagonal, une sous-suite (m_i) telle que la suite $(g_{m_i})_{i \geqslant 0}$ converge simplement sur l'ensemble des rationnels positifs vers une fonction g, définie sur $\mathbf{Q}_+$ et croissante. On peut la prolonger en une fonction croissante définie sur l'ensemble des réels positifs et continue à gauche. Notons encore g ce prolongement. L'ensemble D des points de discontinuité de g est dénombrable et, pour tout réel positif t n'appartenant pas à D et tout couple (r, s) de rationnels tel que $r < t < s$, on a:

$$(\forall i \geqslant 0) \qquad g_{m_i}(r) \leqslant g_{m_i}(t) \leqslant g_{m_i}(s).$$

En faisant tendre i vers l'infini puis r et s vers t, on voit que (g_{m_i}) converge vers g presque partout. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue à la suite des fonctions $t \mapsto t\, g_{m_i}\left(\frac{t}{y}\right) e^{-t^2}$ pour y fixé supérieur à 1; on obtient

$$(25) \qquad (\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty te^{-t^2} g\left(\frac{t}{y}\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha}{y}.$$

En faisant le changement de variable $t^2 = u\,y^2$, il vient

$$(\forall y > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-uy^2} g(\sqrt{u})\,du = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha}{y^3}\,.$$

L'injectivité de la transformation de Laplace implique donc l'égalité

$$g(\sqrt{u}) = 2\alpha\sqrt{u} \tag{26}$$

pour presque tout réel positif u. Comme g est croissante, on voit finalement que (26) a lieu pour tout u.

Nous avons donc montré que, de toute suite d'entiers tendant vers $+\infty$, on peut extraire une sous-suite (m_i) telle que (g_{m_i}) tende simplement vers la fonction $t \mapsto 2\alpha t$. Cela implique la conclusion annoncée.

6. Le contre exemple

Nous nous proposons ici d'établir le théorème 5.

Soit $t \mapsto \psi(t)$ une fonction réelle tendant vers $+\infty$; nous pouvons sans restreindre la généralité supposer que ψ est croissante et que l'on a :

$$\begin{cases} \psi(0) = 1 \\ \psi(t) = o(\sqrt{t}) \\ \limsup\limits_{t\to\infty} \left|\dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)}\right| < +\infty\,. \end{cases} \tag{27}$$

Définissons alors une suite de nombres réels par

$$(\forall n \geqslant 2)\; a_n = \begin{cases} -\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad -m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \leqslant n - m^3 < 0 \\ +\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right) & \text{si} \quad 0 \leqslant n - m^3 \leqslant m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1} \\ 0 & \text{si} \quad (\forall m \in \mathbf{N})\; |n - m^3| > m^{3/2}\psi\left(\dfrac{m^3}{2}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$

$$|a_n| \leqslant \psi(n)\,.$$