3. Critère pour groupes libres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Critère pour groupes libres

Il s'agit du critère suivant:

(3.1) Proposition. *Soient G un groupe agissant sur un ensemble X, B un sous-ensemble de G et H le sous-groupe de G engendré par B. Supposons qu'il existe une collection L_v $(v \in B)$ de sous-ensembles de X et un élément d de $X - \bigcup_{v \in B} L_v$ tels que $b^n (L_v \cup \{ d \}) \subset L_b$ pour tout b et $v \in B$ avec $b \neq v$ et tout $n \in \mathbf{Z} - \{ 0 \}$. Alors H est libre de base B.*

Démonstration. Soit $w = v_1^{n_1} v_2^{n_2} \dots v_k^{n_k}$, avec $v_i \in B$, $n_i \in \mathbf{Z}$ et $v_i \neq v_{i+1}$. On sait que H est libre de base B si, pour tout élément w satisfaisant aux conditions ci-dessus, l'équation $w = 1$ n'est possible que si $n_i = 0$ pour tout i (conséquence de [L-S, Chap. 1, Prop. 1.9], par exemple). Or, les hypothèses de (3.1) impliquent que $wd \in L_{v_1}$. Comme $d \notin L_{v_1}$, on a $wd \neq d$, d'où $w \neq 1$. ■

Le critère (3.1) est un cas particulier d'un énoncé de Tits [Ti 2, Prop. 1.1] (énoncé qui sera lui-même généralisé au § 4). Mais son usage implicite est plus ancien. Dans [F-K, pp. 190-194] ou [Le, pp. 118-120], on l'utilise pour démontrer la liberté des groupes de Schottky: soient (P_i, Q_i) m paires de cercles dans $\mathbf{C}$ tels que tous les cercles soient extérieurs les uns aux autres. Soient $b_i : \mathbf{C} \cup \{ \infty \} \to \mathbf{C} \cup \{ \infty \}$ des transformations de Möbius telles que b_i (extérieur (P_i)) $\subset$ intérieur (Q_i), $(i = 1, \dots m)$. On déduit qur les b_i engendrent un groupe libre de rang n dans le groupe de Möbius en appliquant (3.1) à L_{b_i} = intérieur $(P_i) \cup$ intérieur (Q_i) et $d = \infty$.

Nous allons maintenant utiliser notre critère (3.1) pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Serre [Se, Théorème 4′, § 3.3]:

(3.2) Théorème. *Soit G un groupe agissant librement sur un arbre Γ et soit A un arbre de représentants. Alors G est libre de base $R_{\mathrm{Som}\, A}$* (voir (2.4)).

Démonstration. Comme l'action est libre, G est engendré par $R_{\mathrm{Som}\, A}$ en vertu de (2.4). Puisque A est connexe et que Γ est un arbre, il existe, pour chaque $r \in R_{\mathrm{Som}\, A}$ une *unique* arête $a_r \in \mathrm{Ar}\, \Gamma$ telle que $o(a_r) \in \mathrm{Som}\, A$ et $e(a_r) \in r\, \mathrm{Som}\, A$. On va appliquer le critère (3.1) à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\, \Gamma \qquad L_r = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(a_r) \cup \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(r^{-1} a_r) \qquad d \in \mathrm{Som}\, A$$

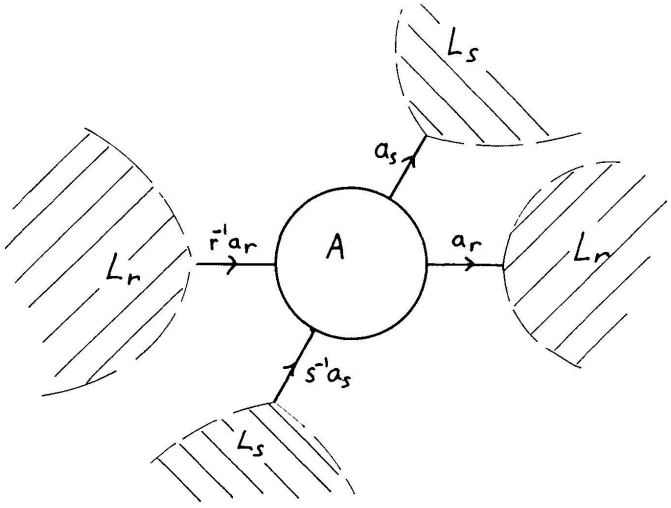

FIG. 2.

Soit $M_r = \operatorname{Som} A \cup \left[\bigcup_{s \neq r} L_s\right]$ $(r \in R_{\operatorname{som} A})$. On déduit de la définition de $R_{\operatorname{Som} A}$ que l'orbite de a_r ne contient aucune des arêtes de A et que

$$M_r \subset \mathscr{B}(r^{-1}a_r) \cap \mathscr{R}(a_r).$$

Il s'en suit que, pour tout $n > 0$, on a

$$r^n M_r \subset \mathscr{B}(a_r) \subset L_r \quad \text{et} \quad r^{-n} M_r \subset \mathscr{R}(r^{-1}a_r) \subset L_r. \qquad \blacksquare$$

Rappelons maintenant la classification de Tits [Ti, Proposition 3.2] des automorphismes d'un arbre:

(3.3) PROPOSITION. *Soit g un automorphisme d'un arbre Γ. Alors, g possède l'une des deux propriétés suivantes (qui s'excluent mutuellement):*

1) *g laisse fixe un sommet de Γ;*
2) *il existe une unique chaîne infinie C_g de Γ stable par g et sur laquelle g agit par translation non-triviale.*

Remarque. Comme nos graphes sont orientés, le cas (ii) de la proposition 3.2 de [Ti] ne se produit pas. C'est pourquoi il n'y a que deux possibilités dans (3.3).

(3.4) PROPOSITION. *Soient g et h deux automorphismes d'un arbre Γ qui ne laissent aucun sommet fixe. Alors, si $\operatorname{Ar} C_g \cap \operatorname{Ar} C_h = \emptyset$, les automorphismes g et h engendrent un sous-groupe libre de rang 2 dans le groupe $\operatorname{Aut} \Gamma$ des automorphismes de Γ.*

Démonstration. Deux cas peuvent se présenter:

a) $\mathrm{Som}\, C_g \cap \mathrm{Som}\, C_h = \{ v \} \subset \mathrm{Som}\, \Gamma$;

b) $\mathrm{Som}\, C_g \cap \mathrm{Som}\, C_h = \emptyset$.

Envisageons tout d'abord le cas a), et supposons qu'il existe des arêtes a_g, $a'_g \in C_g$ et a_h, $a'_h \in C_h$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$o(a_g) = e(a'_g) = v = o(a_h) = e(a'_h),$$
$$ga_g \in \mathscr{B}(a_g) \quad \text{et} \quad ha_h \in \mathscr{B}(a_h).$$

Cette supposition est anodine car, dans les autres cas, la démonstration serait identique après adaptation des notations: changement éventuel de « o ( ) » en « e ( ) », de « $\mathscr{B}$ » en « $\mathscr{R}$ », etc. De la même manière que dans (3.2), la proposition (3.4) est une conséquence du critère (3.1) appliqué à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\, \Gamma, \qquad d = v$$
$$L_g = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(a_g) \cup \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(a'_g)$$
$$L_h = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(a_h) \cup \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(a'_h)$$

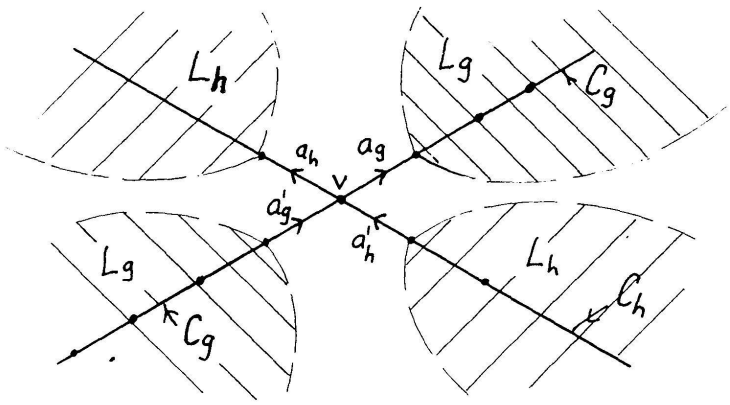

FIG. 3.

Dans le cas b), soit $c : CH_n \to \Gamma$ un chemin minimal reliant C_g à C_h. On peut supposer que $c(0) \in C_g$ et $c(n) \in C_h$, les autres cas donnant des démonstrations identiques à changement de notations près. On applique alors le critère (3.1) à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\, \Gamma, \qquad d \in \mathrm{Som}\, c(CH_n) - \{ c(0), c(n) \}$$
$$L_g = \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(c([o, 1])), \qquad L_h = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(c([n-1, n]))$$

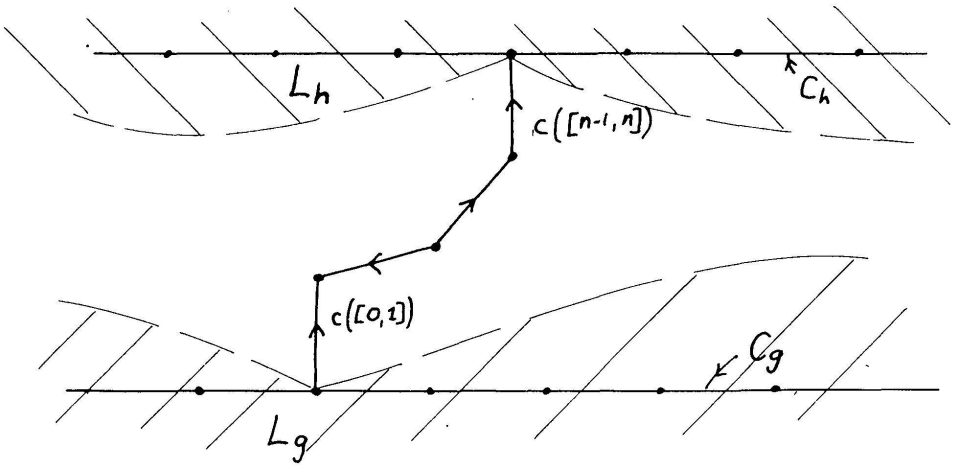

FIG. 4.

La seule difficulté est que le choix du sommet d ci-dessus n'est pas possible si $n = 1$. Ce cas fâcheux s'évite facilement en passant au premier subdivisé barycentrique de Γ. ■

(3.5) PROPOSITION. *Soient g_1 et g_2 deux automorphismes d'un arbre Γ qui ne laissent aucun sommet fixe. On suppose que g_i induit une translation d'amplitude k_i sur sa chaîne $C_i = C_{g_i}$ et que*

$$\operatorname{Card}(\operatorname{Ar} C_1 \cap \operatorname{Ar} C_2) = q < \infty .$$

Soient r et s deux entiers satisfaisant à $rk_1 > q < sk_2$. Alors, les automorphismes g_1^r et g_2^s engendrent un groupe libre de rang 2 dans Aut Γ.

Démonstration. Puisque Γ est un arbre, le graphe $C_1 \cap C_2$ est connexe; il s'agit donc d'un chemin B de longueur q. On peut supposer que la première arête a de B a son origine à l'origine de B et que $g_i\, a \in \mathscr{B}(a)$ (les autres cas donnent lieu à des arguments identiques). De même, on peut supposer que les arêtes $a_1 \in \operatorname{Ar} C_1$ et $a_2 \in \operatorname{Ar} C_2$ « précédant » a sont orientées de façon que $e(a_1) = e(a_2) = o(a)$. L'hypothèse $rk_1 > q < sk_2$ implique que

$$B \subset \big(\mathscr{B}(a_1) \cap \mathscr{R}(g_1^r\, a_1)\big) \cap \big(\mathscr{B}(a_2) \cap \mathscr{R}(g_2^s\, a_2)\big) .$$

On va appliquer le critère (3.1) à la situation:

$$X = \operatorname{Som} \Gamma \qquad d = e(a)$$
$$L_1 = \operatorname{Som} \mathscr{R}(a_1) \cup \operatorname{Som} \mathscr{B}(g_1^r\, a_1)$$
$$L_2 = \operatorname{Som} \mathscr{R}(a_2) \cup \operatorname{Som} \mathscr{B}(g_2^s\, a_2))$$

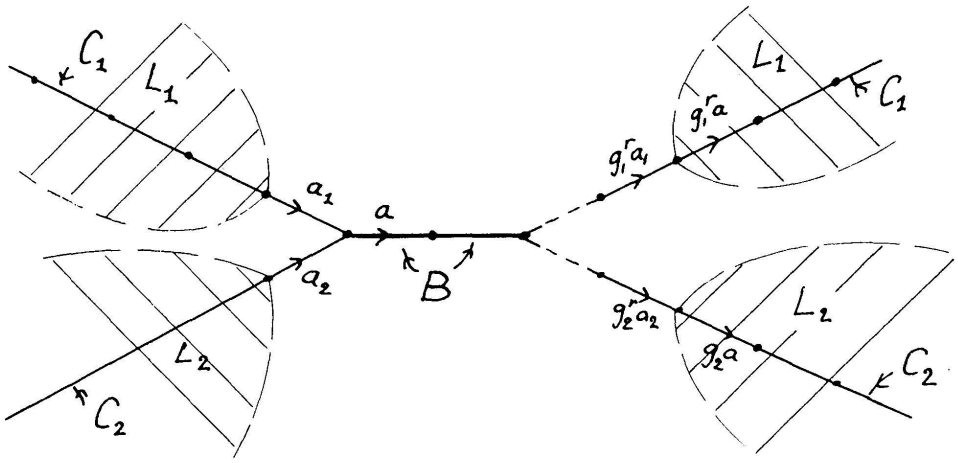

FIG. 5.

On vérifie les hypothèses de (3.1) comme pour la démonstration de (3.2), en utilisant que

$$L_1 \cup \{ d \} \subset \mathscr{B}(a_2) \cap \mathscr{R}(g_2^s a_2)$$

et

$$L_2 \cup \{ d \} \subset \mathscr{B}(a_1) \cap \mathscr{R}(g_1^r a_1) . \qquad \blacksquare$$

(3.6) *Exemple.* Considérons l'action habituelle par transformations homographiques du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $H = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$. L'orbite de l'arc de cercle

$$a = \{ z = e^{i\theta} \mid \pi/2 < z < 2\pi/3 \}$$

constitue, comme le remarque Serre [Se, p. 52], la réalisation géométrique d'un arbre (voir figure 6 ci-dessous).

Soient $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, en termes de transformations homographiques : $g(z) = z + 1$ et $g(z) = \dfrac{z}{z+1}$. On vérifie par calcul direct que ga, $g^{-1}a$, ha et $h^{-1}a$ sont les arêtes dessinées sur la figure 6 :

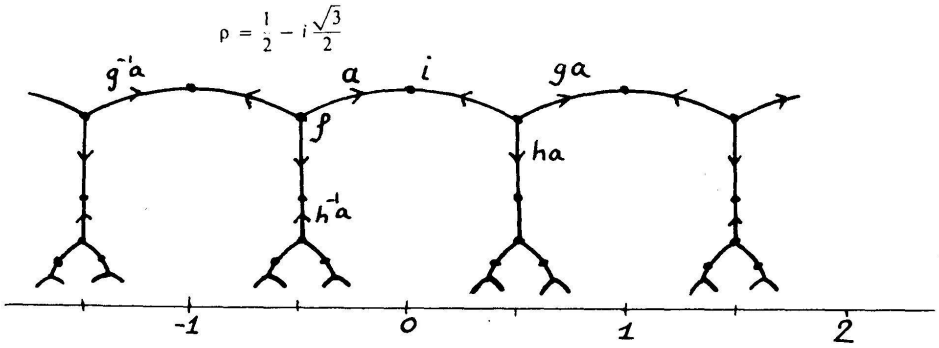

FIG. 6.

On en déduit que g et h translatent avec amplitude 2 des chaînes C_g et respectivement C_h, et $C_g \cap C_h$ contient l'arête a ainsi que sa transformée par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La proposition (3.5) implique alors le fait (classique) que g^2 et h^2 engendrent un groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Observons que le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par g et h^2 n'est pas libre, comme en témoigne la relation $(gh^{-2})^4 = 1$. Ceci montre que l'hypothèse $rk_g > q < sk_h$ de (3.5) est essentielle.

4. Critères pour produits amalgamés

Soit B_i, $i \in J$, une famille de sous-groupes d'un groupe G et soit F un sous-groupe de $\bigcap_{i \in J} B_i$. Les inclusions $B_i \subset G$ s'étendent en un unique homomorphisme $\Psi : *_F B_i \to G$, où $*_F B_i$ dénote le produit de tous les B_i amalgamé sur F.

(4.1) Proposition. *Soient B_i, G et F comme ci-dessus. On suppose que le groupe G agit sur un ensemble X et qu'il existe une famille L_i $(i \in J)$ de sous-ensembles de X et un élément $d \in X - \bigcup_{i \in J} L_i$ tels que:*

1) $F \subset G_d$

2) $(B_i - F)(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout $i, j \in J$ avec $i \neq j$.

Alors, l'homomorphisme $\Psi : *_F B_i \to G$ induits par les inclusions $B_i \subset G$ est injectif.

Démonstration. Tout élément $g \in *_F B_i$ peut s'écrire $g = g_1 f$ avec $f \in F$ et $g_1 = b_n b_{n-1} \dots b_1$, où les B_k sont des éléments de $B_{i(k)} - F$, avec $i(k) \in J$ et $i(k) \neq i(k+1)$. Si $\Psi(g) = 1$ et $g \neq 1$, cela entraîne que $g_1 \neq 1$, puisque $\Psi \mid F$ est injectif. Mais alors, si $g_1 \neq 1$, nos hypothèses font que $\Psi(g)\, d \in L_{i(n)}$. Comme $d \notin L_{i(n)}$, cela montre que $\Psi(g) \neq 1$, d'où Ψ est injectif. ■

(4.2) *Remarques.* 1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'hypothèse 2) de (4.1) peut être affaiblie en: $X_i(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout i, $j \in J$ avec $i \neq j$, où X_i est un ensemble de représentants des classes à gauche non-triviales de B_i modulo F.

2) Le cas $F = 1$ redonne la Proposition 1.1 de [Ti 2].