6. Structures bipolaires

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

inclusions est injectif (avec $\phi(x) = z^{-1}xz$). D'autre part, d'après (2.4), G est engendré par

$$G_u \cup R_{\{u,v\}}\,, \text{ où } R_{\{u,v\}} = \{\, r \in G \mid \text{il existe } a_r \in \mathrm{Ar}\,\Gamma$$
$$\text{avec } o(a_r) \in \{\, u, v \,\} \text{ et } e(a_r) \in r\,\{\, u, v \,\}\,\}\,.$$

Soit $r \in R_{\{u,v\}}$. Comme toutes les arêtes de Γ sont dans la même orbite, il existe $d_r \in G$ tel que $a_r = d_r a$. On a donc

$$d_r v = d_r z u \in \{\, ru, rv \,\}\,.$$

Si $o(a_r) = u$, on a

$$d_r \in G_u \text{ et } e(a_r) = r_v = d_r v\,,$$

d'où

$$d_r^{-1} r \in G_v = z G_u z^{-1}\,.$$

Si $o(a_r) = v$, on a

$$z^{-1} d_r \in G_u \text{ et } e(z^{-1} a_r) = z^{-1} d_r v = z^{-1} r v\,,$$

d'où encore $d_r^{-1} r \in G_v = z G_u z^{-1}$. Dans tous les cas on déduit donc que r est dans le sous-groupe engendré par G_u et z, d'où la surjectivité de Ψ. ■

6. Structures bipolaires

Rappelons qu'une *structure bipolaire* sur un groupe G est une partition de G en cinq sous-ensembles F, EE, E^*E, E^*E^* et EE^* satisfaisant aux axiomes 1) à 6) ci-dessous, avec les conventions suivantes : Si A et B sont deux sous-ensembles de G, on définit l'ensemble

$$AB = \{\, g = ab \in G \mid a \in A \text{ et } b \in B \,\}$$

et l'ensemble

$$A^{-1} = \{\, g \in G \mid g^{-1} \in A \,\}\,.$$

Si $X \in \{\, E, E^* \,\}$, alors $(X^*)^* = X$.

Axiomes d'une structure bipolaire:

1) F est un sous-groupe de G

Pour tout $X, Y, Z, X_i \in \{ E, E^* \}$ on a:

2) $(XY)F \subset XY$.

3) $(XY)^{-1} \subset YX$.

4) $(XY)(Y^*Z) \subset XZ$.

5) Pour tout $g \in G$, il existe un entier $n(g)$ tel que si $g = g_1 g_2 \dots g_k$ avec $g_i \in X_{i-1}^* X_i$ pour $i \geqslant 1$, alors $k \leqslant n(g)$.

6) $E^*E \neq \emptyset$.

Cette définition d'une structure bipolaire est la généralisation due à Lyndon-Schupp [L-S, IV.6] du fameux concept de Stallings [St]. Remarquons que dans cette version, on ne demande pas que F soit un sous-groupe fini.

(6.1) THÉORÈME. *Soit G un groupe agissant sur un arbre Γ. Soit $p \in G$ un élément ne laissant aucun sommet fixe. Alors G admet une structure bipolaire avec $p \in E^*E \cup EE^*$.*

Démonstration. Puisque p ne laisse aucun sommet fixe, il existe, par (3.3), une chaîne infinie C_p stable par p et sur laquelle p opère par translation non-triviale. On peut supposer qu'il existe $a \in \mathrm{Ar}\, C_p$ telle que $pa \in \mathscr{B}(a)$. Si ce n'est pas le cas, on change p en p^{-1}, ce qui n'a pas d'importance puisque $p \in E^*E \cup EE^*$ si et seulement si $p^{-1} \in E^*E \cup EE^*$ par l'axiome 3.

On définit alors $F = G_a$ et les autres ensembles sont déterminés par les conditions suivantes:

$$h \in EE \cup EE^* \Leftrightarrow ha \in \mathscr{R}(a)$$
$$h \in EE^* \cup E^*E \Leftrightarrow d\big(o(a), o(ha)\big) = d\big(e(a), e(ha)\big)$$

ce qui peut se visualiser de la manière suivante:

$r \in EE$

$s \in EE^*$

$t \in E^*E$

$u \in E^*E^*$

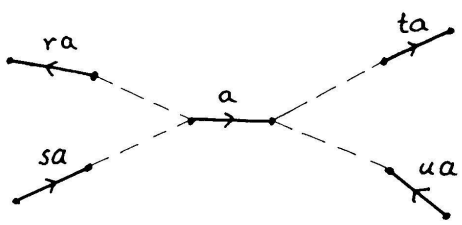

FIG. 8.

Il est clair que l'on a ainsi une partition de E. Les axiomes 1 et 2 sont banals. L'axiome 3 se vérifie par inspection facile des huit cas possibles. Par exemple, pour $(EE)(E^*E) \subset EE$, soit $g \in E^*E$ et $h \in EE$. On utilise le principe que hga est relié à ga comme ga est relié à a, ce qui donne la figure suivante d'où l'on déduit que $hg \in EE$:

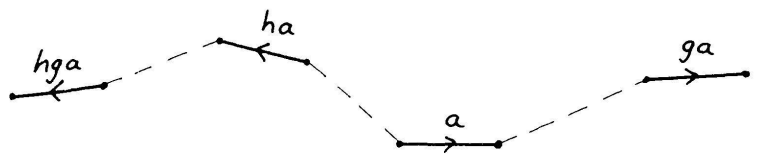

FIG. 9.

La vérification de ces huit cas montre que si $h \in XY$ et $g \in Y^*Z$, alors

$$d(hga, a) > d(ga, a),$$

ce qui permet de vérifier l'axiome 5 en posant $n(g) = d(ga, a)$. Enfin, $p \in E^*E$, d'où l'axiome 6. ■

(6.2) COROLLAIRE. *Un groupe de génération finie qui agit sur un arbre* Γ *sans sommet fixe (i.e.* $(\mathrm{Som}\,\Gamma)^G = \emptyset$*) admet une structure bipolaire.*

Démonstration. Par [Se, Cor. 3, p. 90], il existe un élément $g \in G$ qui ne laisse aucun sommet fixe. On applique alors (6.1). ■

Nous allons maintenant donner notre démonstration du théorème de Stallings-Lyndon-Schupp:

(6.3) THÉORÈME. *Un groupe* G *admet une structure bipolaire si et seulement si* G *est un produit amalgamé non-trivial ou une* HNN*-extension.*

Démonstration. Si G est isomorphe à $B_1 *_A B_2$ (respectivement: si G est isomorphe à $HNN(H, A, \phi)$), alors il existe un arbre Γ sur lequel G agit de telle manière que les groupes d'isotropies des sommets soient les conjugués des B_i (respectivement: les conjugués de H) et les groupes d'isotropie des arêtes soient les conjugués de A (voir [Se, pp. 49-50 ou § 5]). Tout élément qui n'appartient pas à l'un de ces conjugués agit donc sur Γ sans sommet fixe, d'où G, par (6.1), peut être muni d'une structure bipolaire $(F, EE, ...)$ avec $A = F$.

La démonstration de la réciproque nécessite quelques préliminaires. Par définition, un élément $g \in XY$ est dit *irréductible* si $g \neq ab$, avec $a \in XZ$ et

$b \in Z^*Y$. L'ensemble des éléments irréductibles de XY est noté $I(XY)$. Nous avons besoin des lemmes classiques sur les éléments irréductibles sous une forme légèrement plus précise que celle de [L-S, p. 209], aussi nous les redonnons ci-dessous complètement avec leur démonstration.

LEMME 0. $I(XY)^{-1} \subset I(XY)$.

Démonstration. Soit $g \in I(XY)$. On a $g^{-1} \in YX$ par l'axiome 3. Si $g^{-1} = ab$ avec $a \in YZ$ et $b \in Z^*X$, alors $g = b^{-1}a^{-1} \in (XZ^*)(ZY)$ par l'axiome 4, ce qui contredit l'irréductibilité de g. ■

LEMME 1. $(XY)\,I(YZ) \subset F \cup XE \cup XE^*$ en général et

$$(XY)\,I(YZ) \subset XE \cup XE^* \quad \text{si} \quad X \neq Z\,.$$

Démonstration. Soit $g \in XY$ et $h \in I(YZ)$. Si $gh \in X^*U$, alors

$$h \in g^{-1}(X^*U) \subset (YX)(X^*U)$$

ce qui contredit l'irréductibilité de h. Si $gh = f \in F$, alors

$$YZ \quad hf^{-1} = g^{-1} \in YX$$

par les axiomes 2 et 3, d'où $X = Z$. ■

LEMME 2. $I(XY)(YZ) \subset F \cup EZ \cup E^*Z$ en général et

$$I(XY)(YZ) \subset EZ \cup E^*Z \quad \text{si} \quad X \neq Z\,.$$

Démonstration. Identique à celle du lemme 1. ■

LEMME 3. $I(XY)\,I(YZ) \subset F \cup I(XZ)$ en général et

$$I(XY)\,I(YZ) \subset I(XZ) \quad \text{si} \quad X \neq Z\,.$$

Démonstration. Après les lemmes 1 et 2, il suffit de montrer que si $g \in I(XY)$ et $h \in I(YZ)$, alors gh est irréductible si $gh \notin F$ (ce qui implique que $gh \in XZ$). Supposons que $gh = pq$, avec $p \in XW$ et $q \in W^*Z$, d'où $g = pqh^{-1}$. D'après le lemme 1, qh^{-1} appartient soit à W^*U, ce qui contredit l'irréductibilité de g, ou alors $qh^{-1} \in F$, mais ceci nécessite que $W = Y^*$. Dans ce dernier cas, on aurait

$$g = p(qh^{-1}) \in (XY^*)\,F \subset XY^*$$

par l'axiome 2, d'où $g \in XY^* \cap XY$ ce qui est impossible puisque $XY^* \cap XY = \emptyset$. ■

LEMME 4. $I(XY)F \cup FI(XY) \subset I(XY)$.

Démonstration. Si $g \in I(XY)$ et $f \in F$, alors $gf \in XY$ par l'axiome 2. Si $gf = pq$ avec $p \in XW$ et $q \in W^*Y$, on aurait $g = p(qf^{-1}) \in (XW)(W^*Y)$ ce qui contredit l'irréductibilité de g. D'où $I(XY)F \subset I(XY)$, ce qui entraîne $g^{-1}f^{-1} \in I(YX)$ par le lemme 0 et l'axiome 1. Cela implique $fg \in I(XY)$ par le lemme 0 et donc $FI(XY) \subset I(XY)$. ■

Voici encore un lemme qui ne semble pas se trouver dans la littérature:

LEMME 5. $I(XW)(W^*Y) \cap I(XW^*)(WY) = \emptyset$.

Démonstration. Supposons que $gu = hv$, avec

$$g \in I(XW), u \in W^*Y, h \in I(XW^*) \quad \text{et} \quad v \in WY .$$

Alors, les lemmes 0 et 3 ainsi que l'axiome 4 entraînent que

$$\begin{aligned} WY \quad \ni = (h^{-1}g)\, u &\in I(W^*X)\, I(XW)(W^*Y) \\ &\subset I(W^*W)(W^*Y) \subset W^*Y \end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque $WY \cap W^*Y = \emptyset$. ■

Nous pouvons maintenant poursuivre la démonstration de (6.3). L'axiome 2 montre que la partition $(F, EE, \ldots)$ de G induit une partition en cinq sous-ensembles $\{\bar{1}\}, \overline{EE}, \overline{E^*E}, \overline{EE^*}$ et $\overline{E^*E^*}$ de l'ensemble G/F des classes à gauche de G modulo F.

Soient $B_1 = F \cup I(EE)$ et $B_2 = F \cup I(E^*E^*)$. L'axiome 1 ainsi que les lemmes 0, 3 et 4 impliquent que B_i est un sous-groupe de G. On a donc un homomorphisme $\Psi : B_1 *_F B_2 \to G$ qui étend les inclusions de B_i dans G.

Affirmation : Ψ est injectif. Cela se démontre en appliquant le critère (4.1) à la situation:

$$X = G/F, \qquad d = \bar{1},$$

$$L_F = \overline{EE} \cup \overline{EE^*} \qquad L_\phi = \overline{E^*E} \cup \overline{E^*E^*}$$

La condition 1 de (4.1) est banale et la condition 2 se vérifie facilement:

$$(B_1 - F)\,\overline{E^*X} \subset (EE)\,\overline{E^*X} \subset \overline{EX} \subset L_1 \text{ (axiome 4)}.$$

Idem pour $(B_2 - F))(L_1 \cup \{d\}) \subset L_2$.

L'axiome 5 entraîne que G est engendré par les éléments irréductibles. Donc, si l'on suppose que $I(E^*E) = \emptyset$, cela implique que $I(EE^*) = \emptyset$ par le lemme 0 et Ψ est surjectif. On a donc $G = B_1 *_F B_2$ et l'axiome 6 empêche que $F = B_i$

(donc le produit amalgamé est non-trivial). En effet, si par exemple $F = B_2$, alors $G = F \cup EE$ ce qui est impossible puisque $E^*E \neq \emptyset$.

Il reste à examiner le cas où $I(E^*E) \neq \emptyset$. Soit donc $z \in I(E^*E)$ et posons $H = B_1$. On a, par les lemmes 3 et 4:

$$z^{-1} I(E^*E) \subset I(EE^*) I(E^*E) \subset H$$

$$I(EE^*) z \subset I(EE^*) I(E^*E) \subset H$$

$$z^{-1} I(E^*E^*) z \subset I(EE^*) I(E^*E) I(EE) \subset H$$

ce qui montre que G est engendré par z et H (puisque l'on a déjâ vu que G est engendré par les éléments irréductibles). D'autre part, par les lemmes 3 et 4, on a

$$z^{-1} Fz \subset I(EE^*) I(E^*E) \subset H .$$

Soit $\phi : F \to H$ l'homomorphisme injectif défini par $\phi(x) = z^{-1}xz$. On a donc un homomorphisme $\zeta : HNN(H, F, \phi) \to G$ qui étend l'inclusion de H dans G et qui est surjectif. On va démontrer l'injectivité de ζ en appliquant le critère (5.1) à la situation:

$$X = G/F \qquad d = \bar{1}$$

$$L_F = \overline{EE} \cup \overline{EE^*} \qquad L_\phi = \overline{E^*E} \cup \overline{E^*E^*}$$

Il faut vérifier les conditions 1 à 6 de (5.1):

Point 1). Banal.

Point 2). $(H-F)\,\overline{E^*X} \subset (EE)\,\overline{E^*X} \subset \overline{EX}$ (axiome 4).

Point 3). Observons que $zHz^{-1} \subset I(E^*E) \cup F$ par les lemmes 3 et 4. Mais si $zhz^{-1} \in F$ avec $h \in H$, alors $h \in z^{-1}Fz = \phi(F)$. Donc

$$z\big(H - \phi(F)\big) z^{-1} \subset E^*E^* ,$$

et le point 3) se démontre comme le point 2).

Point 4). Se démontre comme le point 2).

Point 5). L'axiome 5 implique que

$$EX = I(EE)\, E^*X \cup I(EE^*)\, EX .$$

Or $I(EE^*)\, z \subset H$ par le lemme 3, d'où $I(EE^*) \subset Hz^{-1}$. On a donc

$$z\,(\overline{EX}) = zI(EE)\,(\overline{E^*X}) \cup zHz^{-1}\,(\overline{EX}) .$$

Par le lemme 3, on a

$$zI(EE)\,(\overline{E^*X}) \subset I(E^*E)\, I(EE)\,(\overline{E^*X}) \subset \overline{E^*X} \subset L_\phi .$$

Soit $x = hz^{-1}v$ avec $h \in H$ et $v \in \overline{EX}$. Par les lemmes 3 et 4, on a

$$zhz^{-1} \in I(E^*E^*) \cup F .$$

Si $zhz^{-1} \in I(E^*E^*)$, on aura $zx \in \overline{E^*X} \subset L_\phi$ par l'axiome 4. Or, ce dernier cas se produit toujours si $x \notin z^{-1}L_F$, puisque si $zhz^{-1} \in F$, on a $h \in z^{-1}Fz$ et $x \in z^{-1}F(\overline{EX}) \subset z^{-1}\overline{EX} \subset z^{-1}L_F$ (le fait que $F(EX) \subset EX$ provient des axiomes 2 et 3). Idem pour la seconde partie du point 5.

Point 6).

$$(H-F)\,\overline{E^*X} \cap z^{-1}\overline{EY} \subset I(EE)\,\overline{E^*X}$$
$$\cap\, I(EE^*)\,\overline{EY} = \emptyset$$

par le lemme 5. Idem pour la seconde partie du point 6), en utilisant le fait vu au point 3) que $z\big(H-\phi(F)\big)z^{-1} = I(E^*E^*)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Du] DUNWOODY, M. J. Accessibility and groups of cohomological dimension one. *Proc. London Math. Soc. 38* (1979), 193-215.

[F-K] FRICKE, R. und F. KLEIN. *Vorlesungen über die Theorie des Automorphen Functionen, Vol. 1.* Leipsig 1897.

[L-S] LYNDON, R. and P. SCHUPP. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag 1977.

[Le] LEHNER, J. *Discontinous Groups and Automorphic Functions.* Providence, Amer. Math. Soc. 1964.

[Se] SERRE, J.-P. Arbres, Amalgames, SL_2. *Astérisque N° 46*, 1977.

[St] STALLINGS, J. *Group Theory and Three-dimensional Manifolds.* Yale University Press, 1971.

[S-W] SCOTT, P. and C. T. C. WALL. Topological methods in group theory. In "*Homological group theory*", Proc. Conf. Durham 1977, *London Math. Soc. Lect. Note Series 36* (1979), 137-204.

[Ti] TITS, J. Sur le Groupe des Automorphismes d'un Arbre. *Essays on Topology and related Topics* (dédié à G. de Rham), Springer-Verlag 1970, pp. 188-211.

[Ti 2] —— Free Subgroups in Linear Groups. *J. of Algebra 20* (1972), 250-270.

(Reçu le 15 août 1980)

Jean-Claude Hausmann

Université de Genève
Case postale 124
1211 Genève 24 (Suisse)