Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

ABSTRACT. Let $\omega(n)$ be the number of prime factors of n; n is said ω-largely composite if $m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$.

The quantity $Q_1(X)$ of such numbers $\leqslant X$ verifies $e^{c_1\sqrt{\log X}} \leqslant Q_1(X) \leqslant e^{c_2\sqrt{\log X}}$. Then we prove

$$\text{card}\left\{n \leqslant x \,\middle|\, \omega(n) > \frac{c \log x}{\log\log x}\right\} = x^{1-c+o(1)}$$

and if $\Omega(n)$ is the total number of prime factors of n counted according to multiplicity, $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \dfrac{\log n}{\log 2}(1+o(1))$.

An integer n is defined ω-interesting if

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

A short study of these numbers is given. We prove that there exists infinitely many strangulation points (n_k) for the function $n - \omega(n)$

i.e. such that: $\quad m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k)$

and $\quad m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k)$

Finally, we deduce from some formula of A. Selberg the exact order of card $\{n \leqslant x \,|\, \omega(n) > \alpha \log\log x\}$ for $\alpha > 1$.

INTRODUCTION

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n. On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives: une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraine $f(mn) = f(m) + f(n)$. Hardy et Ramanujan (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la

valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log\log n$. En 1934, P. Turan donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant: (cf. [Tur])

$$\sum_{n=1}^{x} (\omega(n) - \log\log x)^2 = O(x \log\log x).$$

En 1939, M. Kac et P. Erdös démontraient (cf. [Kac]):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{card} \{ n \leqslant x ; \omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x} \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du.$$

Ensuite, P. Erdös ([Erd 1]) et L. G. Sathe ([Sat]) s'intéressaient aux entiers $n \leqslant x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log\log x$. A. Selberg ([Sel 1]) donnait la « formule de Selberg »

$$(1) \qquad \sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)} = z F(z) x (\log x)^{z-1} + o\left(x (\log x)^{\operatorname{Re}(z-2)}\right)$$

où pour $R > 0$, le O est uniforme pour $|z| \leqslant R$; $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^z.$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de Sathe. Dans la proposition 3, nous suivrons les idées de A. Selberg pour calculer un équivalent de:

$$\operatorname{card} \{ n \leqslant x \mid \omega(n) > \alpha \log\log x \}, \qquad \alpha > 1.$$

La formule (1) a été étendue par H. Delange (cf. [Del 1] et [Del 2]).

Soit p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et posons $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω-hautement composé si $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω-hautement composés est la suite A_k.

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a: $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que pour tout n (cf. [Wri], ch. XVIII):

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n} (1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω-hautement composés $\leqslant X$ vérifie:

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log\log X}.$$

On dit maintenant que $n \geqslant 2$ est ω-largement composé, si $1 \leqslant m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$. Si $A_k \leqslant n < A_{k+1}$, n est ω-largement composé si et seulement si $\omega(n) = k$. Soit $Q_l(X)$ le nombre de nombres ω-largement composés $\leqslant X$. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe deux constantes* $0 < c_1 < c_2$ *telles que:*

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leqslant Q_l(X) \leqslant \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Nous démontrerons ensuite:

THÉORÈME 2. *Soit* c, $0 < c < 1$. *On a:*

$$f_c(x) = \operatorname{card}\left\{ n \leqslant x ; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x} \right\} = x^{1-c+o(1)}.$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple: card $\{n \leqslant x \mid \omega(n) > (\log x)^{\alpha}\}$, $0 < \alpha < 1$. Kolesnik et Straus (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$, pour quelques fonctions arithmétiques f. Nous démontrerons en particulier:

THÉORÈME 3. *On a, pour* $n \to +\infty$ *:*

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \frac{\log n}{\log 2}(1 + o(1)).$$

Au paragraphe IV, nous disons qu'un nombre n est ω-intéressant si:

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n, si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \quad \text{et} \quad m > n \Rightarrow f(m) > f(n).$$

Interprétation géométrique: Le graphe de f, contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en n. Nous démontrerons:

THÉORÈME 4. *La fonction* $n \to n - \omega(n)$ *a une infinité de points d'étranglement.*

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points n tels qu'il existe juste avant n, une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

§ 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Minoration: D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre $(1-2\varepsilon)\log X$ et $(1-\varepsilon)\log X$ un nombre x tel que:

$$\pi(x+f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \qquad \text{et} \qquad \pi(x) - \pi(x-f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $\dfrac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

On choisit $f(x) = c\sqrt{x}\log x$. Soit k tel que $p_k \leqslant x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r}\, q_1 \dots q_r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant s$$

où $q_1, \dots, q_r$ sont des nombres premiers distincts choisis parmi $p_{k+1}, \dots, p_{k+s}$.

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$ et il y en a 2^s. De plus ils vérifient:

$$n \leqslant A_k \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s}}\right)^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leqslant x + f(x)$ et $p_{k-s} \geqslant x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \dfrac{f(x)}{\log x}$. On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leqslant s \log \frac{x+f(x)}{x-f(x)} \underset{\sim}{<} 2c^2 \log x .$$