Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: §1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Interprétation géométrique: Le graphe de f, contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en n. Nous démontrerons:

THÉORÈME 4. *La fonction* $n \to n - \omega(n)$ *a une infinité de points d'étranglement.*

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points n tels qu'il existe juste avant n, une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

§ 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Minoration: D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre $(1-2\varepsilon)\log X$ et $(1-\varepsilon)\log X$ un nombre x tel que:

$$\pi(x+f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \qquad \text{et} \qquad \pi(x) - \pi(x-f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $\dfrac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

On choisit $f(x) = c\sqrt{x}\log x$. Soit k tel que $p_k \leqslant x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r}\, q_1 \dots q_r\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant s$$

où $q_1, \dots, q_r$ sont des nombres premiers distincts choisis parmi $p_{k+1}, \dots, p_{k+s}$.

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$ et il y en a 2^s. De plus ils vérifient:

$$n \leqslant A_k \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s}}\right)^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leqslant x + f(x)$ et $p_{k-s} \geqslant x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \dfrac{f(x)}{\log x}$. On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leqslant s \log \frac{x+f(x)}{x-f(x)} \underset{\sim}{<} 2c^2 \log x\,.$$

Si l'on choisit $c < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura donc $A_k \leqslant n < A_{k+1}$ et ces nombres n seront ω-largement composés et $\leqslant X$. On aura donc :

$$Q_l(X) \geqslant 2^s \geqslant \exp\left(\frac{(1-\varepsilon)\log 2}{\sqrt{2}}\sqrt{\log X}\right).$$

Majoration : La majoration de $Q_l(X)$ est basée sur le lemme:

LEMME 1. *Soit* $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_k$ *le* $k^{\text{ième}}$ *nombre premier et soit* $T(x)$ *le nombre de solutions de l'inéquation :*

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots \leqslant x, \qquad x_i \in \{0, 1\}.$$

Si $C > \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, *on a pour* x *assez grand :*

$$\log T(x) \leqslant C\sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

Démonstration. Le nombre de solutions de l'équation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots = n, \qquad x_i \in \{0, 1\}$$

est le nombre $S(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leqslant x} S(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Hardy et Ramanujan (cf. [Ram]) et Roth et Szekeres donnent la formule [Roth]:

$$\log S(n) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right)$$

et montrent que $S(n)$ est une fonction croissante de n. On a alors: $T(x) \leqslant x\, S[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble:

$$E_k = \{n \mid \omega(n) = k,\ n < A_{k+1}\}.$$

Soit $n \in E_k, n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \ldots q_k$ est sans facteur carré et $n' \in E_k$. De plus $\frac{n}{n'} < p_{k+1}$. On a donc:

$$\text{card } E_k \leqslant p_{k+1} \text{ card } E'_k,$$

avec: $E'_k = \{n \mid n$ sans facteur carré, $\omega(n) = k, n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit:

$$n = 2^{1-y_k}\, 3^{1-y_{k-1}} \dots p_k^{1-y_1}\, p_{k+1}^{x_1} \dots p_{k+r}^{x_r} \dots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1 et $\sum x_i = \sum y_i$. Il vient:

$$\log \frac{n}{A_k} = x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k}$$
$$+ \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'inéquation, en x_i et y_i valant 0 ou 1:

$$x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots$$
$$+ y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

On en déduit: card $E'_k \leqslant N_1 N_2$, avec N_i = nombre de solutions de l'inéquation ξ_i $(i=1, 2)$:

$$(\xi_1) \quad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leqslant \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \quad y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation ξ_1 en deux:

$$\xi'_1 : \quad \sum_{r=1}^{R} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leqslant \log p_{k+1}\,,$$

$$\xi''_1 : \quad \sum_{r=R+1}^{\infty} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

Le nombre de variables de ξ''_1 est en fait fini, et majoré par $p_k p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de ξ''_1 est majoré par $\dfrac{1}{\log 2} \log p_{k+1}$. Le nombre N''_1 de solutions de ξ''_1 est majoré par:

$$N_1'' \leqslant \sum_{j \leqslant \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}} \binom{p_k \; p_{k+1}}{j} \leqslant \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} \, (p_k \, p_{k+1})^{\frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}}$$

ce qui assure:

$$N_1'' = \exp\left((O \log p_k)^2\right).$$

Il résulte de l'inégalité de Brun-Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]):

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y / \log y$$

valable pour $1 < y \leqslant x$ que, pour $k \geqslant 2$:

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log (p_{k+r} - p_k) \geqslant \frac{r}{2} \log 2r .$$

On en déduit que pour $r \leqslant R$, on a:

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geqslant \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geqslant \frac{r \log 2r}{4 p_k} \geqslant c \, \frac{p_r}{p_k} .$$

Toute solution de ξ'_1 est donc solution de l'inéquation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots \leqslant \frac{1}{c} \, p_k \log p_{k+1}$$

et d'après le lemme précédent, on a:

$$\log N'_1 = O(\sqrt{p_k})$$

et le nombre de solutions de ξ_1 vérifie:

$$\log N_1 = O(\sqrt{p_k}) .$$

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de ξ_2 vérifie:

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}) .$$

Ce qui entraine:

$$\log (\text{card } E'_k) \leqslant \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et:

$$\text{card } E_k \leqslant p_{k+1} \, (\text{card } E'_k) = \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right).$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω-largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_l(X)$ de tels nombres $\leqslant X$ vérifie, en posant $A_{k_o} \leqslant X < A_{k_o+1}$, ce qui entraine $\log X \sim p_{k_o}$:

$$Q_l(X) \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right) \leqslant k_0 \exp\left(O(\sqrt{p_{k_0}})\right) \leqslant \exp\left(c_2\sqrt{\log X}\right).$$

Remarque. On peut conjecturer que $\log Q_l(X) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\log X}$. En effet si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k, on peut assimiler $\log\frac{p_{k+r}}{p_k}$ à $r\frac{\log p_{k+1}}{p_k}$ et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leqslant p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}$.

§ 2. Démonstration du théorème 2

Minoration : Posons $k = \left[\frac{c\log x}{\log\log x}\right] + 1$ et $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2\cdot 3\cdot \ldots p_k$, où $\theta(x) = \sum_{p\leqq x}\log p$ est la fonction de Chebichev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > \frac{c\log x}{\log\log x}$. Il y en a $\left[\frac{x}{A_k}\right]$ qui sont inférieurs à x. On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k/\log^2 p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + o(1)\right).$$

Il vient en posant $l = \log x$, $l_2 = \log\log x$, $l_3 = \log\log\log x$:

$$k = \frac{c\,l}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)\left(1 + o(1)\right) l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geqslant \left[\frac{x}{A_k}\right] \geqslant x^{1-c}\exp\left(c(1-\log c)\left(1+o(1)\right)\frac{\log x}{\log\log x}\right).$$