§2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

$$Q_l(X) \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right) \leqslant k_0 \exp\left(O(\sqrt{p_{k_0}})\right) \leqslant \exp\left(c_2 \sqrt{\log X}\right).$$

Remarque. On peut conjecturer que $\log Q_l(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k, on peut assimiler $\log \frac{p_{k+r}}{p_k}$ à $r \frac{\log p_{k+1}}{p_k}$ et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leqslant p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{p_k}$.

§ 2. Démonstration du théorème 2

Minoration : Posons $k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x}\right] + 1$ et $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Chebichev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}$. Il y en a $\left[\frac{x}{A_k}\right]$ qui sont inférieurs à x. On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k/\log^2 p_k) = k\left(\log k + \log \log k - 1 + o(1)\right).$$

Il vient en posant $l = \log x$, $l_2 = \log \log x$, $l_3 = \log \log \log x$:

$$k = \frac{c\,l}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)\left(1 + o(1)\right) l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geqslant \left[\frac{x}{A_k}\right] \geqslant x^{1-c} \exp\left(c(1 - \log c)\left(1 + o(1)\right) \frac{\log x}{\log \log x}\right).$$

Majoration: En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38 ou [Hal 2], p. 147), on obtient:

$$\left(\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p}\right)^k \geqslant k! \sum_{2 \leqq p_{i_1} < \cdots < p_{i_k} \leqq x} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$$

On a donc, pour $k \in \mathbf{N}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqq x,\ n \in S \\ \omega(n) = k}} 1 \leqslant \sum_{\substack{n \leqq x,\ n \in S \\ \omega(n) = k}} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p}\right)^k .$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers $n \leqslant x$ dont les facteurs premiers sont exactement $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$. On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_k}^{\alpha_k} \leqslant x ; \qquad \alpha_j \geqslant 1 .$$

Ce qui entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leqslant \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] ; \qquad \alpha_j \geqslant 1 .$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut $\binom{[\log x \ / \ \log 2]}{k} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^k$.

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqq x \\ \omega(n) = k}} 1 \leqslant \frac{1}{(k!)^2} \left(\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p}\right)^k \left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^k$$

et

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \omega(n) \geqq k}} 1 \leqslant x \sum_{j \geqq k} \frac{\left(\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p}\right)^j (\log x/\log 2)^j}{(j!)^2}$$

On utilise la majoration $\sum_{j \geqq k} \frac{a^j}{(j!)^2} \leqslant \frac{a^k}{(k!)^2} \frac{1}{1 - a/(k+1)^2}$ valable pour $a < (k+1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land] § 28) qu'il existe B tel que $\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} \leqslant \log\log x + B$, et on choisit:

$$k = \left[\frac{c \log x}{\log\log x}\right] + 1 .$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leqslant \frac{x(l_2+B)^k (l/\log 2)^k}{(k!)^2} \left(1+O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leqslant x^{1-c} \exp\left(3c(1+o(1)) \frac{\log x \log\log\log x}{\log\log x}\right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

§ 3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$

1) *Fonction* $\sigma(n)$ = *somme des diviseurs de* n.

On remarque d'abord que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= n \prod_{p^a \| n} \left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right) \\ &= n(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a \| n \\ p \leq \log n}} \left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log\log n$ et:

$$\prod_{\substack{p^a \| n \\ p > \log n}} \left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right) \leqslant \prod_{\substack{p^a \| n \\ p > \log n}} \frac{1}{1-1/p} \leqslant \left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log\log n}}$$

$$= 1 + \frac{O(1)}{\log\log n}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n, $\sigma(n) \geqslant n$ et pour n pair, $\sigma(n) \geqslant \frac{3}{2} n$. On a donc pour tout n: $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geqslant \frac{5}{2} n$. Inversement, pour k fixé, le nombre $n = 4p_2 p_3 \ldots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1-\varepsilon) \log n$ et donc vérifie: $\sigma(n) + \sigma(n+1) = \frac{5}{2} n(1+o(1))$.