Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N

Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis

Kapitel: §3. Valeurs extrêmes de f(n) + f(n +1)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

On obtient alors

$$f_c(x) \leqslant \frac{x\,(l_2+B)^k\,(l/\log 2)^k}{(k!)^2}\left(1+O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leqslant x^{1-c}\exp\left(3c\,(1+o(1))\,\frac{\log x \log\log\log x}{\log\log x}\right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

§ 3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$

1) *Fonction* $\sigma(n) =$ *somme des diviseurs de* n.

On remarque d'abord que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\sigma(n) = n \prod_{p^a \| n}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right) \tag{2}$$

$$= n\,(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a \| n \\ p \leq \log n}}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right)$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log\log n$ et:

$$\prod_{\substack{p^a \| n \\ p > \log n}}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right) \leqslant \prod_{\substack{p^a \| n \\ p > \log n}}\frac{1}{1-1/p} \leqslant \left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log\log n}}$$

$$= 1 + \frac{O(1)}{\log\log n}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n, $\sigma(n) \geqslant n$ et pour n pair, $\sigma(n) \geqslant \frac{3}{2}n$. On a donc pour tout n: $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geqslant \frac{5}{2}n$. Inversement, pour k fixé, le nombre $n = 4p_2 p_3 \ldots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1-\varepsilon)\log n$ et donc vérifie: $\sigma(n) + \sigma(n+1) = \frac{5}{2}\,n\,(1+o(1))$.

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n+1)$ de la façon suivante: Il résulte de (2) que

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leqslant n\bigl(1+o(1)\bigr)\ (P_1 + P_2)$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p} \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p \mid n+1 \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p}\,.$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs à 1, $P_1 + P_2 \leqslant P_1 P_2 + 1$ et

$$P_1 P_2 \leqslant \prod_{p \leq \log n} \frac{1}{1-1/p} \sim e^{\gamma} \log\log n\,,$$

où γ est la constante d'Euler d'après la formule de Mertens (cf. [Wri] § 22.8). Cela donne pour tout n

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leqslant n\bigl(1+o(1)\bigr)\, e^{\gamma} \log\log n\,.$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque pour une infinité de n, on a (cf. [Wri] § 22.9):

$$\sigma(n) \sim n\, e^{\gamma} \log\log n\,.$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leqslant P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut choisir P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max\limits_{n \leq x} \sigma(n)$ et de

$$\max_{n \leq x} \bigl(\sigma(n) + \sigma(n-1)\bigr)$$

montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie: $\max\limits_{n \leq N+1} \bigl(\sigma(n) + \sigma(n-1)\bigr) = \sigma(N) + \sigma(N-1)$ ou $\sigma(N+1) + \sigma(N)$.

2) *Indicateur d'Euler* ϕ.

On a une relation analogue à (2):

$$\phi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\bigl(1+o(1)\bigr) \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On démontre comme précédemment que pour tout $n > 1$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \leqslant \frac{3}{2}\, n$$

et que, pour une infinité de n

$$\phi(n) + \phi(n+1) \sim \frac{3}{2} n .$$

Pour les petites valeurs de $\phi(n) + \phi(n+1)$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geqslant n\big(1+o(1)\big)(P_1+P_2) \geqslant 2n\big(1+o(1)\big)\sqrt{P_1P_2},$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p \mid n+1 \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et comme

$$P_1 P_2 \geqslant \prod_{p \leq \log n} (1 - 1/p) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n},$$

on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geqslant \frac{2e^{-\gamma/2}\, n\big(1+o(1)\big)}{\sqrt{\log \log n}} .$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante: Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On pose $P_k = \prod_{p \leq p_k} (1-1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel que $P_{k'} \geqslant \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \dots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \dots p_k$; on a $\dfrac{\phi(R)}{R} = \dfrac{\phi(S)}{S}\big(1+o(1)\big)$ et l'on prend pour n la plus petite solution des congruences: $n \equiv 0 \bmod R$; $n+1 \equiv 0 \bmod S$. Cette solution vérifie $R \leqslant n < RS = \exp\big(\theta(p_k)\big)$, ce qui montre que n tend vers l'infini avec k,

$$\text{et } \frac{\phi(n)}{n} \leqslant \frac{\phi(R)}{R} \text{ et } \frac{\phi(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\phi(S)}{S} .$$

3) *Fonction Ω: Démonstration du théorème 3.*

PROPOSITION 1. *Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$. On écrit $n(n+1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leqslant k$. Alors il existe $n_0(k, \varepsilon)$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $U_k \leqslant n^{1+\varepsilon}$.*

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque pour $k \geqslant 2$:

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) = \Omega\big(n(n+1)\big) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k)$$

$$\leqslant \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\log 2} + \frac{2\log n}{\log k}, \qquad \text{pour } n \geqslant n_0 .$$

Etant donné η, il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir: $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \dfrac{\log n}{\log 2}(1+\eta)$ pour $n \geqslant n_0$.

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th 4F), comme nous l'a précisé M. Langevin:

PROPOSITION 2 (Ridout). *Soit* θ *un nombre algébrique* $\neq 0$. *Soit* $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ *des nombres premiers distincts, et* $\delta > 0$. *Il y a un nombre fini de nombres rationnels* a/b *avec:*

$$a = a' P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_s^{\alpha_s} \qquad \text{et} \qquad b = b' Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \dots Q_t^{\beta_t}$$

avec: $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in \mathbf{N}$ *et* $a', b' \in \mathbf{N}^*$ *tels que*

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{|a'b'|\,|ab|^{\delta}}.$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que pour une infinité de n, on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leqslant k$ en deux parties $P_1, P_2, \dots P_s$ et $Q_1, Q_2, \dots Q_t$, de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$p \leqslant k \quad \text{et} \quad p \mid n \Rightarrow p \in \{P_1, \dots, P_s\},$$

$$p \leqslant k \quad \text{et} \quad p \mid n+1 \Rightarrow p \in \{Q_1, \dots, Q_t\}.$$

On écrit $n = n' P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n'' Q_1^{\beta_1} \dots Q_t^{\beta_t}$ et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $\dfrac{n+1}{n}$, solution de

$$\left|1 - \frac{n+1}{n}\right| < \frac{1}{|n'n''|\,\big(n(n+1)\big)^{\delta}}$$

puisque $n' n'' = V_k \leqslant n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leqslant 300\,000$ vérifiant

$$m < n \Rightarrow \Omega\big(m(m+1)\big) < \Omega\big(n(n+1)\big)$$

sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega\big(n(n+1)\big)$): 2 (2); 3 (3); 7 (4); 8 (5); 15 (6); 32 (7); 63 (9); 224 (10); 255 (11); 512 (13); 3968 (14); 4095 (17); 14436 (18); 32768 (19); 65535 (20); 180224 (22); 262143 (24).

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4) *Fonction* ω.

Nous avons rappelé dans l'introduction que pour tout n, on a

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n}\big(1+o(1)\big) .$$

Soit $l = \overline{\lim} \dfrac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n / \log\log n}$.

On a $1 \leqslant l \leqslant 2$ de façon évidente. On a probablement $l = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega\big(m(m+1)\big) < \omega\big(n(n+1)\big)$ est: 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc ... On a en particulier $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ et $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. L'équation

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots p_k$$

a-t-elle des solutions > 714? (cf. [Nel]).

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p, on a $\Omega(2p+1) \leqslant 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que pour une infinité de n, on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leqslant \Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant 4 .$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen $\big(\Omega(2p+1) = 1\big)$ permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω.

Si l'on a $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$, n et $n+1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être une puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne ($n = 2^p - 1$ avec p premier) ou si $n+1$ est un nombre premier de Fermat ($n+1 = 2^{2^k}+1$). D'autre part l'équation $2^n \pm 1 = p^a$

avec $a \geqslant 2$ qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$ est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. Nombres ω-intéressants

Définition. On dit que n est ω-intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique: pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Propriété 1: Pour $k \geqslant 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ est ω-intéressant. En effet: si $\omega(m) \leqslant k$ on a bien: $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geqslant A_k 3^\Delta$ et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leqslant \frac{k+\Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{\left(1+\frac{\Delta}{k}\right)}{3^\Delta} \leqslant \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1+\Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

Propriété 2: Soit n vérifiant:

$$A_k < n < A_{k+1}\left(1-\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors n est ω-intéressant.

Démonstration: Soit $m > n$, ou bien on a: $m \geqslant A_{k+1}$ et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leqslant \frac{(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a: $n < m < A_{k+1}$ et cela entraine $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

Propriété 3: Pour une infinité de valeurs de k, il existe un nombre ω-intéressant, plus grand que A_k et ayant $k-1$ facteurs premiers.