2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

Soit V une surface différentiable (variété C^∞ de dimension 2), non nécessairement compacte pour le moment, et $g = \langle\, , \rangle$ une métrique riemannienne sur V.

Soit ∇ une *connexion métrique* sur V. Pour tout couple (X, Y) de champ de vecteurs, $\nabla_X Y$ désigne un autre champ de vecteurs

(i) dépendant $\mathscr{C}^\infty(V)$-linéairement de X ($\mathscr{C}^\infty(V)$ désignant l'algèbre des fonctions C^∞ de V dans $\mathbf{R}$),

(ii) dépendant additivement de Y,

(iii) vérifiant, pour toute $u \in \mathscr{C}^\infty(V)$,

$$\nabla_X (uY) = (X.u)\, Y + u\, \nabla_X Y,$$

(iv) respectant la métrique g au sens suivant: pour tous champs de vecteurs, X, Y, Z, on a

$$X\,.\,< Y, Z > \;=\; < \nabla_X Y, Z > \;+\; < Y, \nabla_X Z > .$$

On sait qu'il existe toujours de telles connexions métriques, par exemple celle de Levi-Civita caractérisée par la formule supplémentaire

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,.$$

Mais nous ne nous limiterons pas à celle-ci.

Si U désigne un ouvert parallélisable de V (c'est-à-dire dont le module des champs de vecteurs est libre) et si (A, B) désigne un champ de repères *orhtonormés* sur U, l'expression

$$\Omega(X, Y) = < \nabla_X \nabla_Y B - \nabla_Y \nabla_X B - \nabla_{[X, Y]} B, A >$$

ne dépend que de l'orientation du champ de repères (A, B) mais non à proprement parler de A et B, et dépend $\mathscr{C}^\infty(V)$-bilinéairement de X et Y: c'est donc une 2-forme sur U, que l'on peut définir sur la surface V toute entière si celle-ci est orientable, et qu'on appelle *2-forme de courbure* (si on change l'orientation de U, Ω est changée en $-\Omega$). [Rappelons, lorsque ∇ est la connexion de Levi-Civita, que la courbure représente l'obstruction à l'existence d'une isométrie locale avec le plan euclidien.]

Soit $s \to \gamma(s)$ un arc de courbe différentiable sur V, supposé paramétré par l'abscisse curviligne s; le champ des vecteurs tangents $\tau = \dfrac{d\gamma}{ds}$ est donc

partout de longueur 1: on déduit de (iv) que $\nabla_\tau \tau$ est normal à τ en tout point de γ. Supposons alors le support de γ inclus dans un ouvert orientable U de V et soit $v(s)$ le vecteur tangent à V en $\gamma(s)$ déduit de $\tau(s)$ par rotation de $+\pi/2$ (une orientation de U ayant été choisie). Il existe donc une fonction différentiable $s \to \rho_g(s)$ telle que

$$\nabla_\tau \tau = \rho_g v :$$

c'est cette fonction que nous appellerons la *courbure géodésique de* γ (elle dépend de l'orientation de γ et de l'orientation de U).

Calculs locaux. Soit U un ouvert parallélisable de V, et (A, B) un champ de repères orthonormés sur U: Les formules (i), (ii), (iii), (iv) prouvent l'existence d'une 1-forme $\omega_{(A,B)}$ sur U telle que

$$\begin{cases} \nabla_Y B = +\omega_{(A,B)}(Y) A \\ \nabla_Y A = -\omega_{(A,B)}(Y) B \end{cases}$$

pour tout champ de vecteurs Y sur U. (On notera en abrégé: $\nabla B = +\omega A$, $\nabla A = -\omega B$). Si (A', B') est un autre champ de repères orthonormés sur U déduit de (A, B) par rotation θ ($A' = \cos\theta.A + \sin\theta.B$, $B' = -\sin\theta.A + \cos\theta.B$), où $\theta : U \to R/2\pi Z$ est une fonction différentiable, on vérifie aisément que

$$(v) \qquad \omega_{(A',B')} = \omega_{(A,B)} - d\theta$$

ATTENTION: malgré la notation, la 1-forme fermée $d\theta$ peut ne pas être un cobord si U n'est pas simplement connexe; la fonction θ prend en effet ses valeurs dans $\mathbf{R}/2\pi\, Z$, et non dans $\mathbf{R}$).

Si on oriente U en décrétant le champ de repères (A, B) direct, la 2-forme de courbure est donnée par

$$(vi) \qquad \Omega = d\omega_{(A,B)}$$

Enfin, si γ est une courbe orientée dans U, et si l'angle polaire $(A_{\gamma(s)}, \tau(s))$ de son vecteur tangent unitaire $\tau(s)$ est égal à $\varphi(s)$

$$(\tau = \cos\varphi\, A + \sin\varphi\, B),$$

on vérifie aisément:

$$(vii) \qquad \rho_g(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} - \omega(\tau).$$