Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

Autor: Lehmann, Daniel

Kapitel: 5. Connexions métriques sans singularités

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORÈME 2 *(théorème des résidus).*

$$\sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = F + S - A .$$

Démonstration. La définition du résidu s'écrit encore, en posant $\beta_i = \pi - \alpha_i$ et en notant n_λ le nombre de sommets (ou d'arêtes) du λ-ième pavé P_λ:

$$2\pi \text{ Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi + \sum_{P_\lambda} \beta_i - (n_\lambda \pi) - \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Sommant toutes ces égalités terme à terme quand λ varie de 1 à F, on obtient:

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi F + \sum_\lambda \Big(\sum_{P_\lambda} \beta_i\Big) - \Big(\sum_\lambda n_\lambda\Big)\pi - \sum_\lambda \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Mais $\sum_\lambda \Big(\sum_{P_\lambda} \beta_i\Big) = 2\pi S$

$\sum_\lambda n_\lambda = 2A$ (puisque chaque arête est commune à 2 pavés),

et

$\sum_\lambda \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds = 0$ (puisque les intégrales se détruisent 2 à 2, chaque arête étant commune à 2 pavés)

d'où

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi (F + S - A)$$

C.Q.F.D.

5. CONNEXIONS MÉTRIQUES SANS SINGULARITÉS

Si $\mathscr{S}_\lambda = \varnothing$, $\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{P_\lambda} \Omega$ d'après la formule locale de Gauss-Bonnet. Le théorème des résidus devient donc le

THÉORÈME 3 *(formule globale de Gauss-Bonnet).* Pour toute connexion ∇ sans singularité sur une surface compacte V, respectant une métrique riemannienne g, et pour tout pavage $(P_1, \ldots, P_F)$ de V, on a:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = F + S - A .$$

Remarque. La 2-forme de courbure Ω n'est définie que si V est orientée. Cependant si V n'est pas orientée ni même orientable, on peut encore définir globalement l'expression $\iint_V \Omega$ comme étant égale à $\sum_{\lambda=1}^{F} \iint_{P_\lambda} \Omega$ (voir remarque finale du § 3).

On déduit aisément du théorème 3 le

COROLLAIRE

(i) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega \in \mathbf{Z}$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega$ ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne g et de la connexion ∇ sans singularité respectant cette métrique,

(iii) $F + S - A$ ne dépend pas du pavage $(P_1, \ldots, P_F)$; ce nombre est un invariant topologique de V (appelé *invariant d'Euler-Poincaré*, noté χ_V dans la suite).

La 2-forme de courbure est en fait ce qu'on appelle une 2-forme « tordue » ou « impaire » (cf. de Rham [2]).

Remarque. Un cas particulier classique de la formule globale de Gauss-Bonnet consiste à supposer la métrique g définie par une immersion $\imath$ de V dans l'espace $\mathbf{E}^3$, et à prendre pour ∇ la connexion de Levi-Civita de g: si V est orientée, $\imath$ permet de définir une « application de Gauss » $\tilde{\imath} : V \to S^2$ de V dans la sphère S^2 en associant, à tout point x de V, la classe d'équipollence du vecteur normal unitaire N_x en x à $\imath(V)$. La « courbure totale » $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega$ devient alors égale au « degré de l'immersion $\imath$ » défini par

$$2 \frac{\displaystyle\iint_V \tilde{\imath}^* \sigma_0}{\displaystyle\iint_{S^2} \sigma_0} \quad \text{(où } \sigma_0 \text{ désigne la 2-forme surface de } S^2\text{).}$$