Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

Autor: Lehmann, Daniel

Kapitel: 6. Connexions métriques plates a singularités isolées

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

6. Connexions métriques plates a singularités isolées

D'une connexion ∇, on dit qu'elle est « plate » ou « sans courbure » si sa 2-forme de courbure (partout définie, au signe près si V n'est pas orientée) est nulle. Le théorème 3 implique en particulier que si $\chi_V \neq 0$, il n'existe pas sur V de métrique g avec connexion métrique sans courbure et sans singularité. Par contre il existera toujours sur V des connexions métriques plates à singularités isolées: on appelle ainsi la donnée d'un nombre *fini* de points $(x_1, ..., x_r)$ sur V, d'une métrique riemannienne g et d'une connexion métrique plate sur l'ouvert $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ de V. Les points x_λ sont appelés les singularités de ∇.

Exemple 1. Tout difféomorphisme du tronc de cône (ouvert) ou du tronc de cylindre (ouvert) sur la sphère S^2 privée de ses 2 pôles nord N et sud S permet de définir, par transport de structure, une métrique localement euclidienne sur $S^2 - \{S, N\}$, puisque cône et cylindre sont des surfaces développables: la courbure de la connexion de Levi-Civita correspondante est donc nulle.

Exemple 2. Soit X un champ de vecteurs sur V, n'ayant que des singularités isolées $x_1, ..., x_r$. Soit $g = \langle\, , \rangle$ une métrique riemannienne arbitraire sur $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ et A le champ de vecteurs $X/\| X \|$ sur U. Il existe alors une unique connexion métrique ∇ sur U telle que $\nabla A = 0$: si B est un champ de vecteurs unitaires orthogonal à A sur un ouvert parallélisable W de U, cette connexion ∇ est définie par $\omega_{(A,B)} = 0$. Cette connexion sur U est en particulier plate ($d\omega_{(A,B)} = 0$).

Remarque. On peut en particulier supposer la métrique g définie sur tout V. Admettant alors l'existence de champ de vecteurs X à singularités isolées sur toute surface compacte V (ou l'existence de fonctions de Morse), cet exemple 2 prouve que pour toute métrique g sur V, il existe une connexion plate avec un nombre fini de singularités, respectant g.

Exemple 3. Soient $(x_1, ..., x_r)$ des points de V tels que l'ouvert $U = V - \{x_1, ..., x_r\}$ soit parallélisable. Soit (A, B) un champ de repères sur U, et ω une 1-forme fermée sur U. On définit sur U une métrique g et une orientation en décrétant le champ de repères (A, B) orthonormé et direct. On définit une connexion métrique ∇ sur U en posant $\omega_{(A,B)} = \omega$

$$(\nabla B = \omega A,\ \nabla A = -\omega B)\,.$$

Puisque la 1-forme ω est fermée, la connexion ∇ est *plate*.

Soient $(x_1, ..., x_r)$ les singularités (isolées) d'une connexion *plate* ∇ sur $V - \{x_1, ..., x_r\}$ respectant une métrique g. Soit P_λ un pavé de V, inclus dans un ouvert parallélisable U_λ ne contenant aucune singularité sur son bord ∂P_λ, et en contenant exactement une, x_λ, en son intérieur. Soient (A_λ, B_λ) un champ de repères orthonormés sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$, et $\omega_\lambda = \omega_{(A_\lambda, B_\lambda)}$ la 1-forme fermée sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ telle que

$$\nabla B_\lambda = \omega_\lambda \cdot A_\lambda ,$$
$$\nabla A_\lambda = -\omega_\lambda \cdot B_\lambda .$$

THÉORÈME 4.

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_\lambda} \omega_\lambda + I(A_\lambda, x_\lambda)$$

($I(A_\lambda, x_\lambda)$ indiquant l'indice du champ de vecteurs A_λ en x_λ).

COROLLAIRE. La définition du résidu ne dépend pas du choix du pavé P_λ satisfaisant aux conditions requises. (On notera encore Rés (∇, x_λ) ce résidu.)

Démonstration du corollaire. Si P'_λ est un autre pavé vérifiant les conditions, les courbes fermés ∂P_λ et $\partial P'_\lambda$ sont toutes deux de même indice 1 par rapport à x_λ (une fois choisie une orientation de U_λ). La forme ω_λ étant fermée, la formule de Stokes permet de conclure:

$$\int_{\partial P_\lambda} \omega_\lambda = \int_{\partial P'_\lambda} \omega_\lambda .$$

Quant à la définition de l'indice $I(A_\lambda, x_\lambda)$, on la suppose ici connue (et donc indépendante de P_λ). [Une définition et étude de cet indice, en bonne et due forme, pourrait éventuellement être faite ici dans un cours, si elle ne l'a pas été avant.]

Démonstration du théorème. Soit $\tilde{A}$ un champ de vecteurs sans singularités défini sur *tout* l'ouvert U_λ (y compris en x_λ). Posons $A' = \tilde{A}/\|\tilde{A}\|$ sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$, et soit B'_λ le champ de vecteur sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ déduit de A'_λ par rotation de $+\pi/2$ (pour l'orientation de $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ définie par (A_λ, B_λ)). Soient enfin $\theta_\lambda : U_\lambda - \{x_\lambda\} \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ l'angle de rotation per-

mettant de passer de (A'_λ, B'_λ) à (A_λ, B_λ), et $\omega' = \omega_{(A'_\lambda, B'_\lambda)}$. De la formule (v) du § 2, on déduit: $\omega'_\lambda = \omega_\lambda + d\theta_\lambda$. Du théorème 1, on déduit

$$\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial P_\lambda} \omega'_\lambda .$$

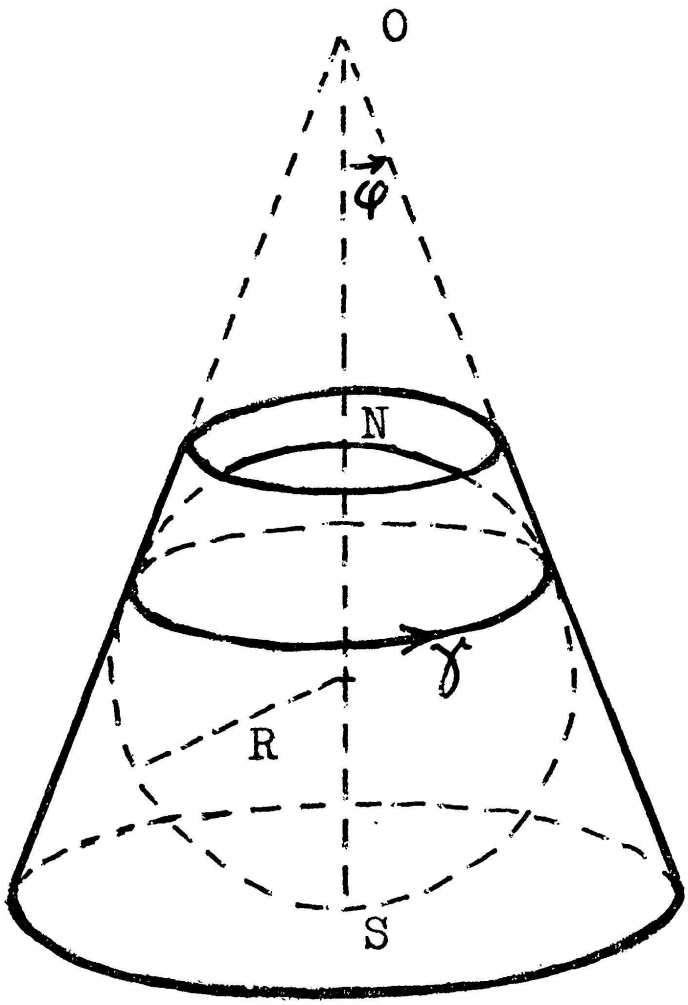
Puisque $I(A_\lambda, x_\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\partial P_\lambda} d\theta_\lambda$, le théorème 4 en résulte.

Remarque. Notons $h_\lambda \in \mathbf{R}/2\pi\,\mathbf{Z}\,(= SO(2))$ l'holonomie de la connexion métrique plate ∇ le long du lacet ∂P_λ entourant x_λ. [Puisque ∂P_λ n'est pas simplement connexe dans le domaine U_λ de ∇, cette holonomie n'a aucune raison d'être triviale.] On vérifie aisément:

$$h_\lambda = 2\pi \text{ Rés}(\nabla, x_\lambda) \pmod{2\pi\,\mathbf{Z}} .$$

La notion de résidu est donc plus *précise* que celle d'holonomie.

Appliquons le théorème des résidus à chacun des exemples 1, 2 et 3 ci-dessus.



Exemple 1. Notons γ la courbe de contact du tronc de cône avec la sphère, φ $(0 < \varphi < \pi/2)$ l'angle au sommet du cône et R le rayon de la sphère. Par développement du tronc de cône dans le plan, γ se développe suivant un arc de cercle d'angle

$$\theta = \frac{2\pi R \cos\varphi}{R \operatorname{cotg}\varphi} = 2\pi \sin\varphi .$$

Donc

$$\int_\lambda \rho_g\, ds = 2\pi \sin\varphi .$$

γ entourant à la fois les pôles N et S, mais devant être muni d'orientations différentes, on en déduit, avec des notations évidentes:

$$\begin{cases} \text{Rés}\,(\nabla, N) = 1 + \sin\varphi \\ \text{Rés}\,(\nabla, S) = 1 - \sin\varphi \end{cases}$$

$$\text{Rés}\,(\nabla, N) + \text{Rés}\,(\nabla, S) = 2 = \chi_{S^2}\,.$$

Remarque. Pour le cylindre, un calcul analogue donne

$$\text{Rés}\,(\nabla, N) = \text{Rés}\,(\nabla, S) = 1\ ,$$

car γ se développe alors sur le plan suivant un segment de droite de sorte que $\int_\lambda \rho_g\, ds = 0$.

Exemple 2. Soit X un champ de vecteurs à singularités isolées $(x_1, ..., x_r)$, et g une métrique riemannienne sur la surface compacte V.

THÉORÈME 5 *(Hopf).*

$$\sum_{\lambda=1}^{r} I(X, x_\lambda) = \chi_V\,.$$

Posons en effet $A = X/\|X\|$ sur $U = V - \{x_1, ..., x_\lambda\}$. Soit U_λ un voisinage de x_λ dans V, et B_λ un champ de vecteurs sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$ tel que (A, B_λ) définisse un champ de repères orthonormés sur $U_\lambda - \{x_\lambda\}$: par définition de la connexion métrique plate de l'exemple 2, $\nabla A = 0$, soit $\omega_{(A, B_\lambda)} = 0$. On déduit du théorème 4 que

$$\text{Rés}\,(\nabla, x_\lambda) = I(A, x_\lambda) = I(X, x_\lambda)$$

d'où le théorème 5, par application du théorème des résidus.

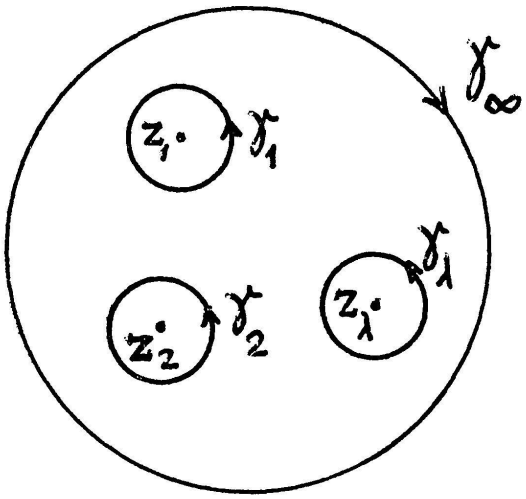
Exemple 3. Nous allons voir un cas particulier de la situation décrite à l'exemple 3, explicitant le lien entre les résidus des connexions métriques plates à singularités isolées, et les résidus des fonctions méromorphes.

Soit $f: \mathbf{C} - \{z_1, ..., z_r\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Par compactification à l'aide d'un point à l'infini, $U = \mathbf{C} - \{z_1, ..., z_r\}$ peut encore être considéré comme $S^2 - \{\infty, z_1, ..., z_r\}$.

Posons: $f(z)\,dz = \omega_1 + i\,\omega_2$ avec

$$\begin{cases} \omega_1 = P\,dx - Q\,dy \\ \omega_2 = Q\,dx + P\,dy \end{cases}$$

où P (resp. Q) désignent comme d'habitude les parties réelle et imaginaire de f, et $z = x + iy$.



Soit $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$ et $B = \dfrac{\partial}{\partial y}$ et ∇_1, ∇_2 les deux connexions métriques associées définies sur U respectivement par ω_1 et ω_2. Dire que f est holomorphe signifie que les formes ω_1 et ω_2 sont fermées, et que par conséquent les connexions ∇_1 et ∇_2 sont plates. Le résidu, au sens habituel des fonctions méromorphes, est donné par

$$R(f, z_\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} f(z)\,dz$$

$$R(f, \infty) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\infty} f(z)\,dz$$

THÉORÈME 6.

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = i\,R(f, z_\lambda)\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla, \infty) + i\,\text{Rés}\,(A_2, \infty) = 2(1+i) + i\,R(f, \infty)\,.$$

Appliquons en effet le théorème 4 avec $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial}{\partial y}$

1) Puisque le champ de repères (A, B) est prolongeable en tout point z situé à distance finie, le théorème 4 (ou 1) s'écrit:

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} \omega_1\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} \omega_2\,,$$

et

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, z_\lambda) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, z_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\lambda} f(z)\,dz = i\,R(f, z_\lambda)$$

2) Puisque $I\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \infty\right) = I\left(\dfrac{\partial}{\partial y}, \infty\right) = 2$, le théorème 4 s'écrit maintenant:

$$\text{Rés}\,(\nabla_1, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\infty} \omega_1 + 2\,,$$

$$\text{Rés}\,(\nabla_2, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\infty} \omega_2 + 2\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\text{Rés}\,(\nabla_1, \infty) + i\,\text{Rés}\,(\nabla_2, \infty) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\infty} f(z)\,dz + 2(1+i)\\ &= i\,R(f, \infty) + 2(1+i)\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

RÉFÉRENCES

[1] BERGER, M. et B. GOSTIAUX. *Géométrie différentielle*. Ed. Colin, 1971.

[2] DE RHAM, G. *Variétés différentielles*. Ed. Hermann, 1955.

[3] HICKS, N. J. *Notes on differential Geometry*. Ed. Van Nostrand, 1956.

[4] LEHMANN, D. *Résidus des connexions à singularités* (à paraître aux *Annales de L'institut Fourier*).

[5] —— *Cours de Géométrie et Topologie en maîtrise* (polycopiés de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Lille 1), 1979-80, chap. V.

[6] LELONG-FERRAND, J. *Géométrie différentielle*. Ed. Masson, 1963.

[7] THORPE, J. A. *Elementary topics in differential Geometry*. Ed. Springer, 1979.

(Reçu le 18 juillet 1980)

Daniel Lehmann

U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées
Université des Sciences et Techniques de Lille
F-59650 Villeneuve d'Ascq