Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR AXIOMATISIERUNG GEWISSER AFFINER GEOMETRIEN
Autor: Prestel, Alexander
Kapitel: 2. Beweis der Charakterisierungslemmas
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51743

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dieses Lemma zeigt, daß die „Kompliziertheit" der Menge S nicht die von R überschreiten darf, um Modell von GA_2 zu sein. Für $R = \mathbf{R}$ sieht man damit sofort, daß jedes konvexe offene S ein Modell ist.

Im 3. Abschnitt folgern wir aus diesem Zusammenhang dann den folgenden Satz über die Nicht-Charakterisierbarkeit:

SATZ. *Es gibt keine Aussage ρ in der Sprache der geordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat S, die genau die konvexen offenen Teilmengen $S \subset R^2$ mit R reell abgeschlossen charakterisiert (*d.h. *in (R, S) gilt), die Modelle von GA_2 sind.*

2. BEWEIS DER CHARAKTERISIERUNGSLEMMAS

Wir bedienen uns in diesem Abschnitt der Ausführungen von Szczerba-Tarski in [S-T$_2$], ohne sie jeweils im einzelnen zu zitieren.

Sei zuerst $S \subset R^2$ offen und konvex, R reell abgeschlossen und in R sei jeder S-definierbare Schnitt realisiert. Von den Axiomen von GA_2 bleibt dann für S lediglich $A\,9$ d.h. C^1 zu zeigen. Es seien also die geometrischen [1]) Formeln $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ gegeben. Unter Ausschluß von trivialen Fällen können wir annehmen, daß φ und ψ zwei nicht-leere Mengen auf einer Geraden durch Punkte $x_0 \neq y_0$ mit $\varphi(x_0)$ und $\psi(y_0)$ definieren. *Für die Koordinaten eines Punktes $z \in R^2$ schreiben wir immer* (z', z''). Es ist nun klar, daß das folgende Verfahren unter Benutzung der Parameterdarstellung der Punkte der Geraden durch x_0, y_0 einen S-definierbaren Schnitt auf R beschreibt, dessen Realisierung in R mit der Realisierung des durch φ und ψ in S definierten Schnittes gleichwertig ist. Man verändere folgendermaßen die Formeln φ und ψ:

(1) alle Parameter a bzw. Variablen z werden durch (a', a'') bzw. (z', z'') ersetzt,

(2) entsprechend werden Quantifikationen $\forall z\, \rho$ und $\exists z\, \rho$ durch $\forall z'\, z''\, (S(z', z'') \Rightarrow \rho)$ bzw. $\exists z'\, z''\, (S(z', z'') \wedge \rho)$ ersetzt,

(3) die Primformeln $B((u', u'')(v', v'')(w', w''))$ werden ersetzt durch $\exists t\, (0 \leqslant t \leqslant 1 \wedge v = tu + (1-t)\, w)$ [2]),

---

[1]) D.h. als einziger Grundbegriff tritt die Zwischenbeziehung B auf und die Quantifikation läuft nur über Punkte.

[2]) Eine Gleichung $a = b$ meint natürlich die Konjunktion $a' = b' \wedge a'' = b''$.

(4) sind $\varphi^*(x', x'')$ bzw. $\psi^*(y', y'')$ die resultierenden Formeln, so setzen wir schließlich

$$\alpha(r) :\equiv \exists x' x'' (\varphi^*(x', x'') \wedge x = x_0 + r(y_0 - x_0))\,^{1)}$$
$$\beta(s) :\equiv \exists y' y'' (\psi^*(y', y'') \wedge y = x_0 + s(y_0 - x_0))\,^{1)}.$$

Die Umkehrung bereitet erheblich größere technische Schwierigkeiten. Sei dazu $S \subset R$ konvex und offen, R reell abgeschlossen und außerdem S ein Modell von GA_2. Es gilt jetzt die Richtigkeit von C^1 in S zu benützen, um zu zeigen, daß in R jeder S-definierbare Schnitt realisierbar ist. Wir haben also eine Übertragung eines Schnittes von R in das Modell S vorzunehmen und müssen dort die arithmetischen Operationen geometrisch beschreiben.

Es ist klar, daß durch Anwendung von affinen Transformationen im R^2 die folgende Situation keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt:

(i) die arithmetischen Formeln α und β definieren unter Benutzung eines 2-stelligen Prädikates S zwei nicht-leere Teilmengen von R im Intervall $[0, 1]$,

(ii) die konvexe offene Menge S enthält die Punkte $e_0 = (0, 0)$, $e_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $e_\infty = (1, 0)$, $e_\omega = (0, 1)$ und $e = (1, -1)$.

Wir denken uns jetzt die affine Ebene R^2 in die projektive Ebene $\mathbf{P}_R^2$ eingebettet und bilden mit einer projektiven Transformation f die uneigentliche Gerade des R^2 im $\mathbf{P}_R^2$ auf die Gerade durch e_ω und e_∞ ab, wobei e_0 in sich überführt werden soll. Diese Abbildung kann für $(x', x'') \in R^2$ etwa durch

$$f(x', x'') = \left(\frac{x'}{1 + x' + x''}, \frac{x''}{1 + x' + x''}\right)$$

beschrieben werden. Die Abbildung f bildet also den Quadranten $0 \leqslant x', x''$ auf das Dreieck e_0, e_∞, e_ω ab, das im Innern von S liegt. Insbesondere bildet f das Intervall $[0, 1]$ von R auf die Strecke $[e_0, e_1]$ in S ab [2]). Damit liegen die f-Bilder des durch α und β definierten Schnittes in S. Es bleibt also noch die Übersetzung der arithmetischen Operationen in die geometrische Sprache von S.

---

[1]) Eine Gleichung $a = b$ meint natürlich die Konjunktion $a' = b' \wedge a'' = b''$.
[2]) Dabei wird wie üblich R durch $r \mapsto (r, 0)$ in R^2 eingebettet.

Da wir nur für nicht-negative $r \in R$ garantieren können, daß ihre f-Bilder in S liegen, ersetzen wir die Formeln α und β durch gleichwertige Formeln (die wir wieder mit α und β bezeichnen wollen), in denen jedoch nur über die Elemente aus $P = \{r \in R \mid r \geqslant 0\}$ quantifiziert wird. Es ist klar, wie dies zu geschehen hat: statt von einem Körperelement r sprechen wir von einer Äquivalenzklasse $\langle r_1, r_2 \rangle / \sim$, wobei für $r_1, r_2, s_1, s_2 \in P$ definiert wird

$$\langle r_1, r_2 \rangle \sim \langle s_1, s_2 \rangle :\Leftrightarrow r_1 + s_2 = s_1 + r_2$$

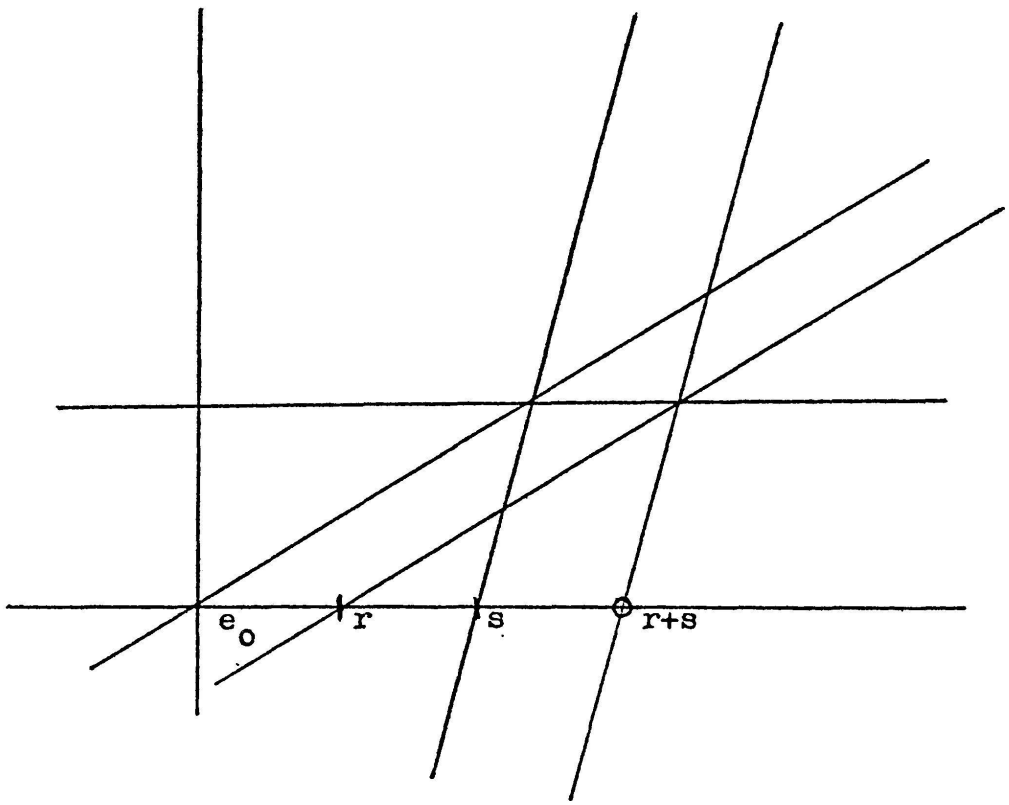
In den Formeln α und β taucht jetzt natürlich das ursprünglich 2-stellige Prädikat S als vierstelliges auf:

$$S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$$

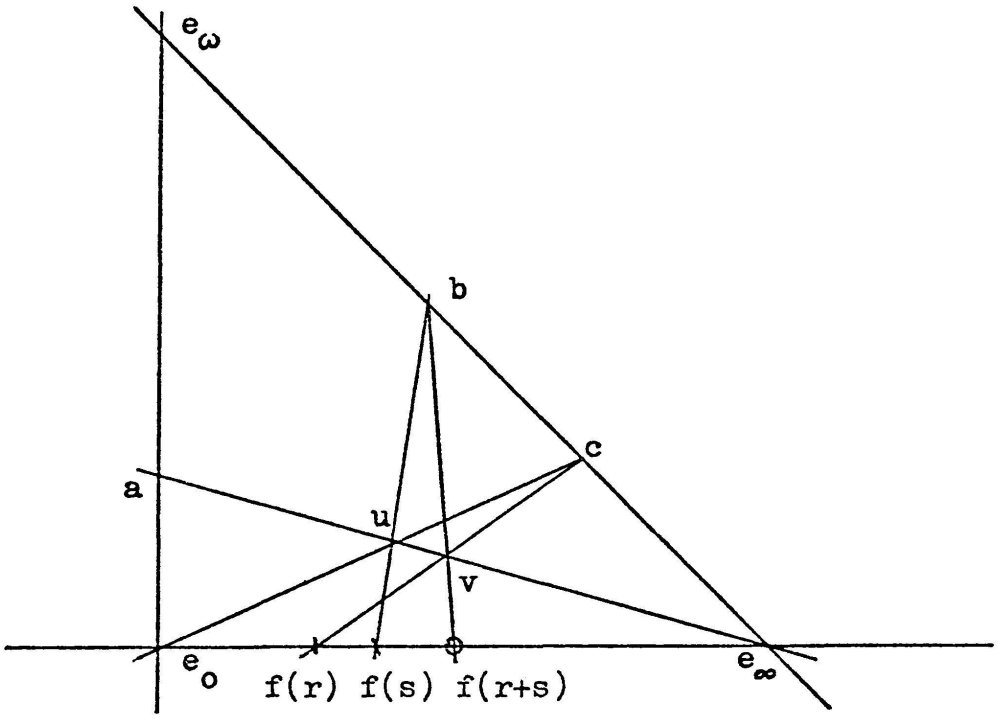
Wir haben also statt (i) jetzt:

(i′) die Formeln α und β enthalten nur Quantifikationen über Elemente aus P, Parameter aus P, das vierstellige Prädikat $S(\langle r_1, r_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle)$ und definieren nicht-leere Mengen im Intervall [0, 1].

Sind nun $r, s, t \in P$ gegeben, so läßt sich die Beziehung $r + s = t$ im Quadranten $0 \leqslant x', x''$ bekanntlich rein affin beschreiben:



Wenden wir die projektive Abbildung f an, so wird daraus:



Bezeichnet dann $x \oplus y = z$ die folgende geometrische Formel:

$$\exists\, abcuv\,[B(e_0 a e_\omega) \wedge e_0 \neq a \neq e_\omega \wedge B(e_\omega b e_\infty) \wedge b \neq e_\infty \wedge B(yub) \wedge$$
$$\wedge\, B(aue_\infty) \wedge B(e_0 uc) \wedge B(ave_\infty) \wedge B(xvc) \wedge B(e_\omega c e_\infty) \wedge$$
$$\wedge\, B(zvb)],$$

so ist klar, daß gilt:

$$f(r) \oplus f(s) = f(r+s)$$

Analog läßt sich die Multiplikation $\odot$ von Elementen aus $[e_0, e_\infty\rangle$ rein geometrisch in S definieren. Es gilt dann

$$f(r) \odot f(s) = f(r \cdot s)$$

Es fehlt jetzt noch die Übersetzung von

$$S(\langle r_1, r_2\rangle, \langle s_1, s_2\rangle)$$

Wir suchen eine geometrische Formel $\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2)$ mit der Eigenschaft:

$$\left.\begin{array}{c}\sigma(f(r_1), f(r_2); f(s_1), f(s_2)) \\ \text{gilt in } S\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} S(\langle r_1, r_2\rangle, \langle s_1, s_2\rangle) \\ \text{gilt in } (R, S)\end{array}\right.$$

Die Formel σ muß also in S ausdrücken, daß $\langle x_1, x_2\rangle$ und $\langle y_1, y_2\rangle$ die f-Bilder der affinen Koordinaten $\langle r_1, r_2\rangle$ und $\langle s_1, s_2\rangle$ eines Punktes aus S sind. Dabei genügt es natürlich, wenn

$$\langle x_1, x_2\rangle \approx \langle f(r_1), f(r_2)\rangle \text{ und } \langle y_1, y_2\rangle \approx \langle f(s_1), f(s_2)\rangle$$

gilt, wobei $\approx$ die analog zu $\sim$ mit $\oplus$ in $[e_0, e_\infty\rangle$ gebildete Äquivalenzrelation ist. Nach Szczerba-Tarski [S-T$_2$], §5 läßt sich eine Formel $K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$ angeben, die für $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ gerade besagt, daß

$$(f(z'), f(z'')) = (\langle x_1, x_2\rangle/\approx, \langle y_1, y_2\rangle/\approx)$$

ist. Wir können also

$$\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2) :\equiv \exists z\, K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$$

setzen.

Nach diesen Ausführungen dürfte klar sein, daß die folgende Übersetzungsvorschrift für die Formeln α und β einen geometrisch definierten Schnitt auf $[e_0, e_1]$ liefert, dessen Realisierung in S eine Realisierung des ursprünglichen Schnittes auf [0, 1] nach sich zieht:

(1) ersetze in α und β Quantifikationen $\forall x\, \rho$ bzw. $\exists x\, \rho$ durch $\forall x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \Rightarrow \rho)$ bzw. $\exists x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \wedge \rho)$,

(2) ersetze die Teilformeln $u + v = w$ und $u \cdot v = w$ durch $u \oplus v = w$ bzw. $u \odot v = w$,

(3) ersetze die Teilformeln $S(\langle u_1, u_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle)$ durch $\sigma(u_1, u_2; v_1, v_2)$,

(4) ersetze Parameter r durch $f(r)$.

3. Die Nicht-Charakterisierbarkeit

Wir wollen nun den im 1. Abschnitt formulierten Nicht-Charakterisierbarkeitssatz beweisen, indem wir ihn auf ein Resultat von R. Montague in [M] zurückführen.

Dazu betrachten wir zuerst einen reell abgeschlossenen Körper R mit einer Teilmenge N, die die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

(a) $O \in N$ und $r \in N \Rightarrow r + 1 \in N$

(b) $r, s \in N, r < s \quad \Rightarrow r + 1 \leqslant s$

(c) $(\forall r \in R, r \geqslant O)(\exists t \in N)\, t \leqslant r < t + 1$