4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

auch umgekehrt N mit Hilfe von S_N^R definiert werden kann. Es gilt nämlich für $t \in R$, $0 < t$

$$t \in N \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 4)(\exists s)\left[s^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 = r \wedge \left(s, \frac{s}{t}\right) \in S_N^R\right],$$

d.h. die Gerade durch $(0, 0)$ und $(t, 1)$ reicht in S_N^R bis zum Rand des Kreises mit dem Radius 2. q.e.d.

Wir können jetzt den Satz beweisen: Angenommen, es gäbe eine Aussage ρ der Sprache der angeordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für S, so daß für $S \subset R^2$ mit S konvex und offen und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt. Für jedes $N \subset R$, das (a)-(c) erfüllt, heißt dies speziell

$$S_N^R \text{ Modell von } GA_2 \Leftrightarrow \text{in } (R, N) \text{ gilt } \rho^*,$$

wobei man ρ^* aus ρ erhält, indem man die Definition von S_N^R in ρ für das Prädikat S einsetzt. ρ^* hat jetzt das zusätzliche Prädikat N. Mit dem letzten Lemma erhalten wir dann:

> Ist R reell abgeschlossen und hat $N \subset R$
> die Eigenschaften (a)-(c), so ist genau dann
> in R jeder N-definierbare Schnitt realisiert,
> falls in (R, N) die einzelne Aussage ρ^* gilt.

Dies widerspricht jedoch Theorem 8 zusammen mit Theorem 6 in [M]. Montague zeigt nämlich dort in Theorem 6, daß die Theorie der reell abgeschlossenen Körper R mit Teilprädikat N mit (a)-(c), in dem jeder N-definierbare Schnitt realisiert ist, „strongly semantically closed" ist. Nach Theorem 8 impliziert dies, daß das Schema der „reellen Abgeschlossenheit" zusammen mit endlich vielen anderen Aussagen (z.B. (a)-(c) und ρ^*) nicht ausreicht, diese Theorie zu axiomatisieren.

4. Schlussbemerkungen

1. Der eben bewiesene Satz läßt sich verschärfen zu

Satz'. *Es gibt keine Aussage ρ der schwachen 2. Stufe für angeordnete Körper mit zusätzlichem 2-stelligen Prädikat S, so dass für konvexe offene Teilmengen $S \subset R^2$ und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt.*

Dabei meint „schwache 2. Stufe", daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage ρ gäbe, so würde ρ insbesondere in $(\mathbf{R}, S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}})$ gelten. Ersetzen wir $S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}}$ in ρ durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage ρ^* der schwachen 2. Stufe, die in $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$ gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl $n \geqslant 2$ gibt, so daß die durch Δ_n^1-Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper R_n von $\mathbf{R}$ bilden, in dem einerseits ρ^* gelten würde, der aber andererseits nicht alle $\mathbf{N}$-definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits ρ in $(R_n, S_{\mathrm{N}}^{R_n})$ gelten, andererseits ist aber $S_{\mathrm{N}}^{R_n}$ nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von GA_2.

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung $V = L$ bewiesen werden. Der Satz′ behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge $S_{\mathrm{N}}^{\mathbf{R}}$ wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von GA_2 zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von GA_2 über $\mathbf{R}$ gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom C^2 der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie GA_2 ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren" hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper R eine Charakterisierung derjenigen S_{N}^{R} angekündigt, die Modelle von GA_2 sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T$_1$] ungelöst, nämlich, ob GA_2 eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

LITERATUR

[A] Apt, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci. 20* (1972), 347-348.

[C] Coxeter, H. S. M. *Non-Euclidean geometry*. Toronto 1942.

[H] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1913.

[K] Klingenberg, W. *Grundlagen der Geometrie*. Mannheim 1971.