3) KONSTRUKTION VON K

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3) Konstruktion von K

$t \in L$ sei transzendent über F.

Wir wollen $K \subset L$ als algebraische Erweiterung von $F(t)$ so konstruieren, daß neben (2)

$$F = \{a \in K \mid \forall\, b \in L^q (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \to b \in K^q\}$$

und

$$M = \{r \in F \mid \forall\, r_1,\ r_2 \in F (r_1 \neq r_2 \,\&\, r_1 + r_2 = r \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q \text{ oder } t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q))\}$$

$(F^* = F \setminus \{o\})$

K gewinnen wir als Vereinigung einer Folge

$$F(t) = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset L$$

von endlichen Erweiterungen von $F(t)$. Um die q-ten Potenzen zu kontrollieren, wählen wir gleichzeitig eine Folge

$$\phi = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \ldots$$

von endlichen Teilmengen $S_i \subset E_i \cap L^q$ mit dem Ziel, daß

$$(K \cap L^q) \setminus K^q = (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$$

Um die gewünschten Darstellungen von M und $(K \cap L^q) \setminus K^q$ nicht schon durch falsche Wahl von (E_i, S_i) unmöglich zu machen, fordern wir für alle i

(4) Es gibt eine Familie $(v_s)_{s \in S_i}$ von Bewertungen $v_s : E_i \to G_{v_s}$, v_s trivial auf F, mit:

(4.1) (in G_{v_s}) ist $v_s(s)$ nicht durch q teilbar, $(s \in S_i)$

(4.2) für alle $r_1,\ r_2 \in F$, $r_1 + r_2 \in M$, $r_1 \neq r_2$:

$\forall s \in S_i \quad q$ teilt $v_s(t^q - r_1)$

oder

$\forall s \in S_i \quad q$ teilt $v_s(t^q - r_2)$

Wir beginnen mit einer Aufzählung $a_0, a_1, \ldots$ aller $a \in L$, die algebraisch über $F(t)$ sind. Jedes Element der Folge soll unendlich oft vorkommen.

Sei (E_i, S_i) schon konstruiert. Wir unterscheiden vier Fälle:

$i = 4n$. Es gibt zwei Fälle

a) q teilt $[E_i(a_n): E_i]$. Wir setzen dann $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b) q teilt $[E_i(a_n): E_i]$ nicht. Dann setzen wir

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i(a_n), S_i).$$

Zum Nachweis von (4) verwenden wir

LEMMA 1. H_2 sei eine endliche Erweiterung des Körpers H_1, $q \nmid [H_2: H_1]$ $v_1: H_1 \to G_{v_1}$ sei eine diskrete Bewertung. Dann gibt es auf H_2 eine Fortsetzung v_2 von v_1 mit $q \nmid (G_{v_2}: G_{v_1})$.

Beweis: Wir können annehmen, daß H_2 separabel oder rein inseparabel über H_1 ist. Im separablen Fall gilt

$$[H_2: H_1] = \sum_i (G_{v_2^i}: G_{v_1}) f_i$$

wobei die v_2^i alle Fortsetzungen von v_1 auf H_2 durchlaufen und f_i der Grad der jeweiligen Restklassenkörpererweiterung ist. q kann also nicht alle $(G_{v_2^i}: G_{v_1})$ teilen.
Wenn H_2 rein inseparabel über H_1 ist, gibt es genau eine Fortsetzung v_2. $(G_{v_2}: G_{v_1})$ ist eine p-Potenz, $p \neq q$.

Wenn nun die $v_s: E_i \to G_{v_s}$, $s \in S_i$, (4.1) und (4.2) erfüllen, wählen wir Fortsetzungen $\bar{v}_s: E_{i+1} \to G_{\bar{v}_s}$ mit $q \nmid (G_{\bar{v}_s}: G_{v_s})$. Die $\bar{v}_s$, $s \in S_i$ erfüllen wieder (4.1) und (4.2).

$i = 4n+1$. Es gibt drei Fälle

a) $a_n \notin E_i$ oder $a_n \notin L^q$. Wir setzen dann $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$.
Wenn $a_n \in E_i \cap L^q$, wählen wir $v_s: E_i \to G_{v_s}$, $s \in S_i$ mit (4).

b) Es gibt ein $s \in S_i$, für das q nicht $v_s(a_n)$ teilt. Setze in diesem Fall

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{a_n\}).$$

(4) gilt, wenn wir v_s für v_{a_n} nehmen.

c) q teilt alle $v_s(a_n)$, $s \in S_i$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i(\sqrt[q]{a_n}), S_i), \text{ wobei } \sqrt[q]{a_n} \in E_i, \text{ falls } a_n \in E_i^q$$

Daß (4) gilt, folgt aus

LEMMA 2. q sei verschieden von der Charakteristik des Restklassenkörpers des bewerteten Körpers (H, v); es sei $a \in H \setminus H^q$ und $v(a)$ durch q teilbar. Dann gibt es eine Fortsetzung w von v auf $H(\sqrt[q]{a})$ mit $G_v = G_w$.

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß $q = [H(\sqrt[q]{a}) : H]$. Es gibt ein $c \in H$ mit $v(c^q) = v(a)$. Wenn die Restklasse von $c^q a^{-1}$ im Restklassenkörper keine q-Potenz ist, ist $G_w = G_v$ für alle Fortsetzungen w von v (Gradungleichung). Sonst liegt die q-te Wurzel von $c^q a^{-1}$ in der henselschen Hülle von (H, v). Wir gewinnen w durch Einbettung von $H(\sqrt[q]{a})$ in die henselsche Hülle.

$i = 4n+2$. Es gibt zwei Fälle

a) $a_n \notin E_i$ oder $a_n \in F$. Wir setzen $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b) $a_n \in E_i \setminus F$.

Es gibt dann eine auf F triviale Bewertung v von E_i, für die $v(a_n)$ negativ ist. (4) möge von $(v_s)_{s \in S_i}$ erfüllt sein. Zuerst erweitern wir E_i zu einem Körper E, für den (4.2) für $v, v_s, (s \in S_i)$ gilt:
Wenn (4.2) schon in E_i für $v, v_s, (s \in S_i)$ gilt, bleiben wir bei $E = E_i$. Sonst muß es ein $r \in F$ geben mit

$$q \text{ teilt nicht } v(t^q - r)$$
$$\forall\, s \in S_i \; q \text{ teilt } v_s(t^q - r).$$

(Man beachte: Es gibt höchstens ein $r \in F$, für das q $v(t^q - r)$ nicht teilt.) Wir brauchen noch

LEMMA 3. $L = L^q \cdot F$

Beweis: Sei $a \in L$. Wir suchen ein $b \in F^*$ mit $ab^{-1} \in L^\varphi$. Wenn L algebraisch- oder reell abgeschlossen ist, finden wir $b \in \{1, -1\}$. Im Fall $L = \mathbf{Q}_p$ bemerken wir, daß c in $\mathbf{Q}_p$ eine q-te Potenz ist, wenn $w(c - d^q) \geqslant w(c) + 3$ (Hensels Lemma, w ist die p-adische Bewertung von $\mathbf{Q}_p$). Wir wählen also $b \in F$ so, daß $w(a-b) \geqslant w(a) + 3$. Dann ist $w(ab^{-1} - 1) \geqslant w(ab^{-1}) + 3$.

Das Lemma liefert nun ein $d \in F^*$ mit $d(t^q - r) \in L^q$. Wir setzen $E = E_i(\sqrt[q]{d(t^q - r)})$. $\bar{v}$ sei irgendeine Fortsetzung von v auf E, die Fortsetzungen $\bar{v}_s$ der v_s seien nach Lemma 2 gewählt. (E, S_i) erfüllt also (4) und (4.2) gilt sogar für $\bar{v}, \bar{v}_s, (s \in S_i)$.

Schließlich bestimmen wir ein $b \in E$ mit

$$b,\ 1+b,\ a_n^q + b^{-1} \in L^q$$
$$c \text{ teilt } \bar{v}(1+b),\ \bar{v}(a_n^q+b^{-1}),\ \bar{v}_s(1+b),\ \bar{v}_s(a_n^q+b^{-1}),\ (s \in S_i)$$
$$\bar{v}(b) \text{ ist das kleinste positive Element von } G_{\bar{v}},$$

und setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = \left(E\left({}^q\sqrt{1+b}, {}^q\sqrt{a_n^q+b^{-1}}\right), S_i \cup \{b\}\right).$$

Wenn wir $\bar{v}$, $\bar{v}_s$ nach Lemma 2 fortsetzen, sehen wir, daß (4) gilt. ((4.2) ist wegen der Wahl von E erfüllt.)

Es bleibt noch b zu finden.

Die Bewertungen $\bar{v}, \bar{v}_s$ sind unabhängig. Der Approximationssatz liefert uns also ein $b \in E$ mit

$$q \textit{ teilt } \bar{v}_s(b)\ ,\ \bar{v}_s(b) < o,\ -\bar{v}_s(a_n^q);\ (s \in S_i, \bar{v} \neq \bar{v}_s)$$
$$\bar{v}(b) = \text{kleinstes positives Element von } G_{\bar{v}}\,.$$

Man rechnet jetzt leicht nach, daß alle Werte $\bar{v}(1+b)$, $\bar{v}(a_n^q+b^{-1})$, $\bar{v}_s(1+b)$, $\bar{v}_s(a_n^q+b^{-1})$ durch q teilbar sind. Wenn $L = L_p$, $\mathbf{C}$ oder $q \neq 2$ und $L = \mathbf{R}$ ist auch klar, daß b, $1+b$, $a_n^q+b^{-1} \in L^q$. In den anderen Fällen müssen wir b noch genauer bestimmen:

$L = \mathbf{R}$, $q = 2$: Wir wählen b so, daß zusätzlich $b > 0$.

$L = \mathbf{Q}_p$: w sei die p-adische Bewertung von L, $d \in \mathbf{Q}^q$ mit $w(d) \geqslant 3$ und $w(a_n^q d) \geqslant 3$. Mit dem Approximationssatz wählen wir nun b so, daß zusätzlich $w(d-b) \geqslant w(d) + 3$. Dann ist.

$$w(b-d) \geqslant w(b) + 3 \Rightarrow b \in L^q,$$
$$w\big((1+b)-1\big) = w(d) \geqslant 3 \Rightarrow 1 + b \in L^q,$$
$$w\big((a_n^q+b^{-1})-b^{-1}\big) \geqslant w(b^{-1}) + 3 = w(a_n^q+b^{-1}) + 3$$
$$\Rightarrow a_n^q + b^{-1} \in L^q.$$

$i = 4n+3$. Wir unterscheiden zwei Fälle

a) $a_n \in M$ oder $a_n \notin F$. Hier setzen wir $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b) $a_n \in F \setminus M$.

(4) sei durch $(v_s)_{s \in S_i}$ erfüllt. Wir beachten, daß

$$B = \{r \in F \mid \exists\, s \in S_i \quad q \text{ teilt nicht } v_s(t^q - r)\}$$

endlich ist.

Für $r \in F^*$ hat $t^q - r$ keine mehrfachen Faktoren (in $F[t]$). Es gibt also eine auf F triviale Bewertung $\bar{v}_r$ von $F(t)$, für die $\bar{v}_r(t^q - r)$ das kleinste positive Element von $G_{\bar{v}_r}$ ist. Wir wählen für jedes r eine Fortsetzung w_r von $\bar{v}_r$ auf E_i. Dann ist $G_{\bar{v}_r} = G_{w_r}$ für fast alle r. Die Menge

$$C = \{r \in F^* \mid q \text{ teilt } w_r(t^q - r)\}$$

ist also endlich. Wir bemerken noch, daß $w_r(t^q - r') = 0$, wenn $r \neq r'$.
Wir wählen jetzt $r_1 \in F$ so, daß $r_1 \neq 0$, a_n, $2r_1 \neq a_n$ und r_1 in keiner der Mengen

$$C,\ a_n - C,\ M - B,\ a_n - (M - B)$$

liegt. Es sei $r_2 = a_n - r_1$. Lemma 3 liefert uns $s_i \in F^*$ mit $s_i(t^q - r_i) \in L^q$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2)\}).$$

Es muß noch (4) gezeigt werden.
Weil q $w_{r_1}(t^q - r_1)$ und $w_{r_2}(t^q - r_2)$ nicht teilt, gilt zunächst (4.1) für die Bewertungen w_{r_1}, w_{r_2}, v_s, $(s \in S_i)$. Um (4.2) zu zeigen, seien $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2 \in F$, $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in M$ gegeben. Es ist dann z.B. für alle $s \in S_i$ $v_s(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar. Wenn auch $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ und $w_{r_2}(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar sind, sind wir fertig. Sei also z.B. $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ nicht q-teilbar. Dann ist $r_1 = \bar{r}_1$, $r_i \neq \bar{r}_2$ und $\bar{r}_2 \in M - r_1$. Folglich ist $w_{r_i}(t^q - \bar{r}_2) = 0$, und alle $v_s(t^q - \bar{r}_2)$, $(s \in S_i)$, sind durch q teilbar.
Damit ist die Konstruktion von K abgeschlossen.

4) Die Eigenschaften von K

Wir zeigen in diesem Abschnitt (2) und

(5) $(K \cap L^q) \setminus K^q = (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$

(5′). $K \setminus F^* \cdot K^q = F^* \cdot (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} S_i)$

(6) $F = \{a \in K \mid \forall\, b \in L^q \quad (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$

(6′) $F = \{a \in K \mid \forall\, b \in K \quad (1 + b \in K^q \,\&\, a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in F^* \cdot K^q\}$

(7) $M = \{r \in F \mid \forall\, r_1, r_2 \in F\ (r_1 \neq r_2 \,\&\, r_1 + r_2 = r) \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q$
oder $t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q)\}$