1. Théorème principal, diverses formulations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MEILLEURE APPROXIMATION LINÉAIRE ET ESPACES EUCLIDIENS

par A. ROBERT

INTRODUCTION

Il est étonnant de constater que certains théorèmes affines dans l'espace $\mathbf{R}^3$ sont de démonstration délicate...

Ainsi en est-il d'une caractérisation de l'ellipsoïde parmi les corps convexes symétriques comme étant le seul pour lequel les limites ombre-lumière (sur sa surface) sont des courbes planes dans toutes les directions d'éclairage parallèle (sec. 1, th. B). On trouvera plusieurs variantes de ce résultat dans la section 1.

Il est même gênant de devoir remarquer que ce résultat connu n'est exposé de façon complète nulle part (à notre connaissance). On pourra consulter la fin de la section 1 pour de plus amples commentaires concernant la bibliographie relative à ce sujet.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à R. Bader qui m'a stimulé par son intérêt à cette question et qui m'a de plus fourni la plupart des références citées.

1. THÉORÈME PRINCIPAL, DIVERSES FORMULATIONS

Tous les espaces normés considérés dans cet article seront réels. Soit E un tel espace. On dit que E est *euclidien* lorsque sa norme dérive d'un produit scalaire, c'est-à-dire lorsqu'il existe une application bilinéaire symétrique

$$E \times E \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto (x \mid y)$$

telle que

$$\| x \|^2 = (x \mid x) .$$

D'après un résultat bien connu dû à Jordan et von Neumann, un espace normé est euclidien dès que tous ses sous-espaces de dimension 2 le sont. L'identité du parallélogramme

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

caractérise en effet les normes dérivant d'un produit scalaire.

Lorsque E et F sont deux espaces normés, l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires continues $u : E \to F$ est aussi un espace normé avec la définition

$$\| u \| = \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqslant 1} \| u(x) \| .$$

En particulier, le dual topologique E' de E (cas $F = \mathbf{R}$) et $L(E) = L(E, E)$ sont des espaces normés attachés canoniquement à E. Les projecteurs de E sont les éléments $P \in L(E)$ tels que $P^2 = P$. Un projecteur non nul a nécessairement une norme supérieure ou égale à 1.

Le résultat suivant est aussi connu, bien que moins populaire.

THÉORÈME A. *Pour qu'un espace normé E de dimension supérieure ou égale à 3 soit euclidien, il faut et il suffit que pour tout sous-espace F de dimension 2 de E, il existe un projecteur P_F de E sur F et de norme 1.*

Avant de donner des références concernant les démonstrations de ce résultat ou de ses formes équivalentes, nous en présenterons diverses versions. D'abord, si E est euclidien, on prendra pour P_F le projecteur orthogonal sur F. D'autre part, d'après le résultat de Jordan et von Neumann, il suffit de considérer le cas $\dim(E) = 3$. Dénotons alors par $K = B_1$ la boule unité fermée de E définie par $\| x \| \leqslant 1$. Les projecteurs de norme 1 de E sur F correspondent aux cylindres de base $K \cap F$ *contenant* K (les génératrices de ces cylindres étant parallèles aux noyaux des projecteurs correspondants). Comme E est euclidien exactement lorsque E' l'est, le théorème A admet une forme duale que nous n'explicitons que dans le cas crucial de la dimension 3 (dual algébrique E^* et dual topologique E' coïncident en dimension finie et s'identifient à E lui-même lorsque ce dernier est euclidien grâce au théorème de Riesz, élémentaire dans ce cas).

THÉORÈME A'. *Pour qu'un espace normé E de dimension 3 soit euclidien, il faut et il suffit que pour tout sous-espace G de dimension 1 de E, il existe un projecteur de norme 1 et de noyau G.*

Le passage entre les formes A et A' s'effectue naturellement en transposant les opérateurs :

$$\| {}^t u \| = \| u \|, {}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v \ (u \text{ projecteur} \Leftrightarrow {}^t u \text{ projecteur}) .$$

Le noyau G du projecteur ${}^tP$ est l'ensemble *polaire* (ou l'*orthogonal*) de l'image de P

$$f \in \operatorname{Ker} {}^tP \subset E^* \Leftrightarrow f \circ P = {}^tP(f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ nulle sur } F = \operatorname{Im} P$$
$$\Leftrightarrow f \in F^\perp ,$$

d'où la conclusion puisque $\dim F = 2 \Leftrightarrow \dim F^\perp = \operatorname{codim} F = 1$.

Le théorème A′ admet aussi une formulation plus géométrique. Prenons un ensemble convexe fermé symétrique K de $\mathbf{R}^3$. Dès que K est de *dimension* 3 (i.e. contient un point intérieur), K est la boule unité fermée d'une norme sur $\mathbf{R}^3$ qu'il suffit de définir par

$$\| x \| = \operatorname{Inf} \{\lambda > 0 : x/\lambda \in K\} \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbf{R}^3 .$$

On peut alors considérer l'espace normé E correspondant.

THÉORÈME B. *Soit K un convexe fermé symétrique (relativement à un point) de dimension 3 (possédant un point intérieur dans $\mathbf{R}^3$). Lorsque dans toute direction d'éclairage parallèle, les zones d'ombre et de lumière sur K sont délimitées par une courbe plane, K est un ellipsoïde.*

Encore faut-il préciser le sens exact à attacher à cet énoncé dans le cas (possible a priori) où la frontière S de K possède un segment de droite de longueur non nulle. Dans la direction d'éclairage parallèle correspondant à un tel segment, « la limite ombre-lumière » n'est pas définie univoquement. Dans ce cas, il doit y avoir une courbe plane coupant chacun des segments parallèles à la direction d'éclairage et de longueur non nulle (de façon à pouvoir construire un cylindre ayant pour base la courbe plane et enveloppant S et K).

Mentionnons encore une application du théorème A dans la *théorie de la meilleure approximation normée.* Voici le cadre général de cette théorie. Soient E un espace normé, F un sous-espace (fermé) de E. Pour $x \in E$, on appelle *meilleure approximation* de x dans F tout élément $x_F \in F$ tel que

$$\| x - x_F \| \leqslant \| x - y \| \quad \text{pour tout} \quad y \in F .$$

Lorsque F est de dimension finie, donc localement compact, tout élément $x \in E$ possède (au moins) une meilleure approximation dans F. Si la norme de E est *strictement convexe* (cela signifie que la boule unité K de E ne contient aucun segment de droite de longueur positive sur sa frontière S), tout élément de E admet une *unique* meilleure approximation dans F et l'application $x \mapsto x_F$ est donc bien définie dans ce cas. Quand est-elle *linéaire*? Une réponse à cette question est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME C. *Soit E un espace normé de dimension supérieure ou égale à 3. Pour que E soit euclidien, il faut et il suffit que pour tout sous-espace G de dimension 1 de E, il existe une application linéaire $E \to G : x \mapsto x_G$ donnant une meilleure approximation de x par un élément de G.*

Ce théorème se démontre à partir du théorème A′ comme suit. En prenant $y = 0 \in G$ dans la propriété de meilleure approximation, on voit que $\| x - x_G \| \leqslant \| x \|$ et l'hypothèse de linéarité montre alors que

$$P_G : E \to E, \qquad x \mapsto x - x_G$$

est un projecteur de norme 1 et de noyau G (donc de rang 2 et d'image supplémentaire à G). Les sous-espaces de dimension 3 de E sont donc euclidiens et la conclusion en résulte. Il est d'ailleurs clair que la meilleure approximation existe (et est unique) dans tout espace euclidien et est donnée par projection orthogonale.

Revenant au cas de la meilleure approximation en général, si x_F est meilleure approximation de x dans F, λx_F sera meilleure approximation de λx dans $F(\lambda \in \mathbf{R})$. Le problème de linéarité est donc l'additivité de $x \mapsto x_F$. Comme on a aussi $x_F + y$ meilleure approximation de $x + y$ pour $y \in F$, la linéarité est automatique si F est de codimension 1 dans E. Remarquons en passant que si x_F est une meilleure approximation de x dans F, on a

$$\| x_F \| \leqslant \| x_F - x \| + \| x \| \leqslant 2 \| x \| .$$

(Il est facile de construire des exemples d'espaces normés E de dimension 2 et F de dimension 1 avec $\| x_F \|$ arbitrairement voisin de $2 \| x \|$.) Par définition de la meilleure approximation x_F de x dans F on a

$$\| x - x_F \| = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \| x - y \| = \| \dot{x} \| \quad \text{dans} \quad E/F$$

(c'est en effet ainsi qu'on définit la norme quotient de E/F). La linéarité de $x \mapsto x_F$, équivalente à la linéarité de $x \mapsto x - x_F$, revient ainsi à l'existence d'un plongement isométrique de E/F sur un supplémentaire convenable de F dans E (le quotient E/F doit être *réalisé* avec sa norme sur un supplémentaire de F). En d'autres termes, la suite exacte courte d'espaces normés

$$F \to E \underset{p}{\overset{s}{\leftrightarrows}} E/F$$

doit être scindée par une section isométrique s. On a donc

THÉORÈME C′. *Soit E un espace normé de dimension supérieure ou égale à 3. Pour que E soit euclidien, il faut et il suffit que pour tout sous-espace F de dimension 1 de E, l'espace normé E/F s'identifie à un hyperplan fermé supplémentaire de F dans E.*

Voici maintenant quelques remarques concernant l'origine des problèmes considérés.

Le théorème C, à l'origine de cette rédaction, est cité par Dhombres [7] (p. 21 : il n'en donne pas la démonstration « pénible »). Avec des hypothèses de lissité implicites, le théorème B a été démontré par Blaschke à l'occasion de

l'étude de certains problèmes variationnels [2]. Birkhoff [1] reprend l'argument de Blaschke pour en déduire un énoncé voisin du théorème B (il fait encore une hypothèse — explicite — d'unicité de plans d'appui, revenant immédiatement à la différentiabilité de la surface S). Il utilise un théorème de représentation des groupes (dû à von Neumann) pour parvenir à sa conclusion. Kakutani [9], auquel ce théorème a parfois été attribué ultérieurement, se borne à dire que l'hypothèse de lissité est superflue (se référant à Bonnesen-Fenchel [4] p. 13, il croit pouvoir se dispenser de donner la moindre indication « since this may be easily carried out » !). La première démonstration (relativement) complète de la lissité est donnée par Phillips [10]. Pour pouvoir étendre le théorème A′ au cas complexe ($\dim_{\mathbf{C}} = 3$), Bohnenblust [3] introduit des méthodes plus conceptuelles. En particulier, il remplace les arguments de Blaschke et de Birkhoff par l'utilisation du théorème fondamental de la géométrie projective (dans la formulation donnée par E. Cartan). Finalement, Bourbaki [6] formule une suite de problèmes (difficiles) entrelaçant les cas réels (*loc. cit.* p. 142-143) et complexes (p. 144). Il suit en gros la méthode inaugurée par Bohnenblust.

On trouvera aussi une démonstration du théorème B dans le livre de géométrie différentielle de Guggenheimer ([8], p. 310-311 où ce théorème est appelé théorème de Maschke (sic!): par l'intermédiaire de l'utilisation des formules de Serret-Frenet pour certaines courbes tracées sur la surface, il fait implicitement toutes les hypothèses de différentiabilité — jusqu'à l'ordre 3 — requises).

Les références [11] à [15] montrent l'évolution des différentes notions d'orthogonalité (et de géométrie fine) dans les espaces normés de 1945 à 1955.

2. Démonstration de la différentiabilité

Dans cette section, on démontrera l'affirmation suivante. *Si E est un espace normé de dimension 3 possédant (au moins) un projecteur de norme 1 sur chaque plan (homogène), alors la boule unité fermée K de E possède un plan tangent en chaque point de sa frontière S et cette surface est continûment différentiable.*

Nous procéderons en plusieurs étapes, commençant par quelques rappels en dimension 2.

Point 1. La frontière d'un convexe fermé possédant un point intérieur dans le plan $\mathbf{R}^2$ est une courbe continue (fermée si ce convexe est borné). Cette courbe possède des demi-tangentes à « gauche » et à « droite » de chaque point. De plus, sauf en un ensemble au plus dénombrable de points appelés *pointes*, cette courbe a une tangente (ses deux demi-tangentes sont en prolongement l'une de l'autre).