Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1982)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MEILLEURE APPROXIMATION LINÉAIRE ET ESPACES EUCLIDIENS
Autor: Robert, A.
Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (CAS DIFFÉRENTIABLE)
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52242

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(qui appartient à ce plan homogène) doit être parallèle à la tangente à $\mathfrak{C}$ en x_φ. Le champ continu de droites

$$\varphi \mapsto x_\varphi + P(d_\varphi)$$

est défini sur toute la courbe $\mathfrak{C}$ et fournit la tangente t_φ à $\mathfrak{C}$ en x_φ chaque fois que ce point est dérivable sur $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire sauf en un ensemble au plus dénombrable de points. Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant (formulé avec des notations légèrement différents et plus usuelles).

LEMME. *Soient I un intervalle (d'intérieur non vide dans $\mathbf{R}$) et f une fonction continue $I \to \mathbf{R}$. Supposons f dérivable en tous les points de $I - D$ où D est une partie au plus dénombrable de I. S'il existe une fonction continue $g : I \to \mathbf{R}$ telle que $g(x) = f'(x)$ en tout $x \in I - D$, alors f est continûment dérivable sur tout I et $f' = g$.*

La démonstration de ce lemme est facile! Appelons h la primitive de g nulle en $x = a$

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt .$$

Par définition h est continûment dérivable avec $h' = g$. Par hypothèse, $f - h$ est dérivable en tout $x \in I - D$ et de dérivée nulle en ces points. Comme cette fonction $f - h$ est continue, le théorème des accroissements finis montre qu'elle est constante: $f = h + c$ est continûment dérivable et $f' = h' = g$.

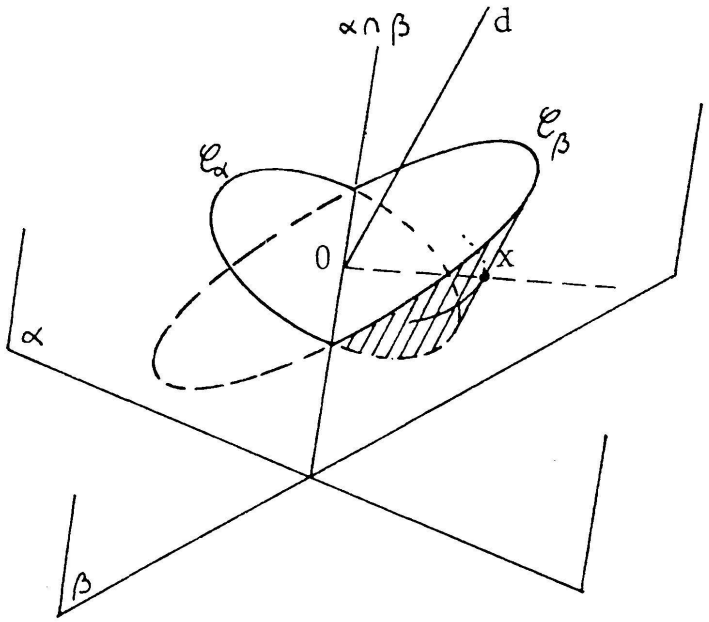
3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (CAS DIFFÉRENTIABLE)

Nous avons vu (point 4, sec. 2) que sous les hypothèses du théorème A, il y a un unique projecteur P_α de norme 1 sur chaque plan homogène α. Montrons maintenant que

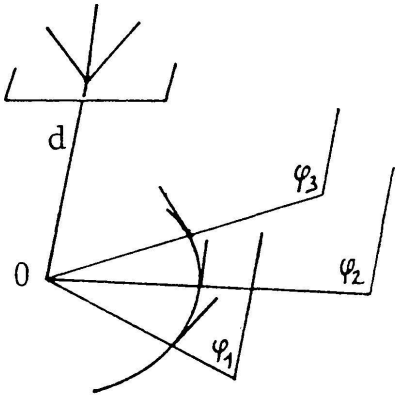
$$\alpha \mapsto \mathrm{Ker}(P_\alpha) = d_\alpha$$

est *injective*: à deux plans (homogènes) distincts correspondent des directions de projection de norme 1 *distinctes*. En effet, prenons deux plans homogènes $\alpha \neq \beta$. Si les projecteurs P_α et P_β avaient même noyau d, la surface $S = \mathrm{Fr}(K)$ contiendrait une portion de cylindre de génératrices parallèles à d, limitée par α et β. Considérons alors une section *intermédiaire* $\mathfrak{C}_\gamma = S \cap \gamma$ (γ est un plan homogène contenant la droite $\alpha \cap \beta$ et situé entre α et β relativement à d). D'après le théorème de Krein-Milman, on peut choisir un point x de $\mathfrak{C}_\gamma$ extrêmal sur $K \cap \gamma$ et non situé sur la droite $\alpha \cap \beta$ (il pourrait arriver que les seuls points ayant les propriétés indiquées soient x et $-x$: ce cas se présenterait si $K \cap \gamma$ était

un parallélogramme avec deux sommets sur $\alpha \cap \beta$! On comparera d'ailleurs cette situation avec sa duale du point 4, sec. 2). Ainsi, x est intérieur à un segment de S parallèle à d, tout en étant extrêmal sur toutes les sections planes de K définies par des plans homogènes γ' contenant $0x$ et distinctes du plan engendré par d et $0x$. Les projecteurs de norme 1 sur ces plans γ' devraient avoir d comme noyau, contrairement au fait que l'ensemble des projecteurs correspondant au faisceau de plans d'axe $0x$ est compact.



L'application bijective $\alpha \mapsto d_\alpha = \mathrm{Ker}(P_\alpha)$ transforme plans coaxiaux en droites coplanaires. En effet, les droites d_i correspondant à un système de plans ϕ_i contenant une droite commune d (homogène) doivent être parallèles aux plans tangents en les deux points symétriques de $S \cap d$. En d'autres termes, l'application considérée transforme droites de $\mathbf{P}^*$ en droites de $\mathbf{P}$. Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme alors qu'il existe une application linéaire bijective de $\mathbf{R}_3 = (\mathbf{R}^3)^*$ dans $\mathbf{R}^3$ qui induit $\alpha \mapsto d_\alpha$ au niveau des espaces projectifs (puisque le corps $\mathbf{R}$ n'a aucun automorphisme non trivial, il n'y a pas à utiliser le résultat de continuité ici).



En particulier, si on fixe une section plane $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\alpha$ de S, il existe une application linéaire A bijective $\alpha \to \alpha$ telle que $A(0x_\varphi) = d_\varphi$ (d_φ étant la droite homogène parallèle à la tangente t_φ à $\mathfrak{C}$ en x_φ : les notations sont celles du point 6 de la sec. 1). Dans le plan α, et en coordonnées polaires d'angle φ en 0, la courbe $\mathfrak{C}$ est ainsi une solution (stricte puisque continûment dérivable) d'une équation différentielle vectorielle du type

$$\frac{d}{d\varphi}\vec{x} = A\vec{x} \qquad (\vec{x} = 0x \in \alpha).$$

Comme cette solution $\mathfrak{C}$ est fermée, la discussion de ces systèmes autonomes en dimension 2 montre que les valeurs propres de A doivent être imaginaires pures (conjuguées) et $\mathfrak{C}$ est une ellipse!

Globalement, prenant un système d'axes $0xyz$, les trois sections de S par les plans de coordonnées doivent être des ellipses et S est engendrée par une famille d'ellipses (verticales pour fixer les idées) s'appuyant sur une ellipse de base fixe. C'est un ellipsoïde.