3. Commentaires concernant la partie analytique de la démonstration

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Substituant cette expression dans les relations trouvées pour $\psi(a+\lambda)$ et prenant $\lambda = \lambda_j \in L_2$ (correspondant aux éléments de la base duale de $(e_i) \subset L_1$), on voit

$$\psi(a+\lambda_j) = \psi(a) + 2i\pi(z''_j - z'_j) + 2i\pi m_j \quad (m_j = m_{\lambda_j}).$$

Mais la linéarité de ψ donne directement

$$\psi(a+\lambda_j) - \psi(a) = 2i\pi\Sigma\nu_l f_l(\lambda_j).$$

Par comparaison, on trouve donc

$$f_j(z''-z'+\Sigma m_l e_l) = z''_j - z'_j + m_j = \Sigma\nu_l f_l(\lambda_j) = \Sigma\nu_l f_j(\lambda_l).$$

Cette égalité de composantes fournit l'égalité vectorielle

$$z'' - z' = \Sigma\nu_l\lambda_l - \Sigma m_l e_l$$

avec

$$\lambda_l \in L_2,\ m_l e_l \in L_1$$

et la démonstration sera terminée dès qu'on aura remarqué que les ν_l sont des *entiers*

$$(z''-z' \in L_1 + L_2 = L \Rightarrow z'' = z' \in V/L).$$

Or on a vu en cours de route

$$\psi(a+\lambda) = \psi(a) + 2i\pi n_\lambda (n_\lambda \in \mathbf{Z} \text{ lorsque } \lambda \in L)$$

et en substituant l'expression linéaire affine de ψ

$$\psi(a) = 2i\pi\Sigma\nu_l a_l + \nu$$

on trouve sans peine $\nu_l = n_l \in \mathbf{Z}$. q.e.d.

3. Commentaires concernant la partie analytique de la démonstration

Pour démontrer le théorème de plongement, nous avons considéré les espaces vectoriels S_k formés des fonctions entières f sur V satisfaisant les équations fonctionnelles

$$f(z+\lambda) = e_\lambda(z)^k f(z) \quad (\lambda \in L).$$

Rappelons aussi que les facteurs exponentiels $e_\lambda(z)$ sont déterminés par

$$\begin{cases} e_\lambda = 1 & \lambda \in L_1 , \\ e_\lambda(z) = \exp -i\pi f_\lambda(\lambda + 2z) & \lambda \in L_2 . \end{cases}$$

En particulier, l'espace S_0 est formé de fonctions entières L-périodiques, donc constantes d'après le théorème de Liouville : $S_0 = \mathbf{C}$. On peut aussi observer que le produit d'une fonction de S_k par une fonction de S_l est une fonction de S_{k+l}, ce qui suggère de considérer l'anneau gradué

$$S = \bigoplus_{k \geqslant 0} S_k = \mathbf{C} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$$

des fonctions theta. Par exemple, la multiplication par la fonction theta de Riemann $\theta \in S_1$ induit des applications injectives $S_k \to S_{k+1}$. Comme on a déjà vu que ces espaces S_k ont des dimensions finies, les $\dim(S_k)$ forment une suite croissante. Plus précisément

PROPOSITION. *On a* $\dim(S_k) = Pf(E)^n k^n$ *(E étant la forme alternée sur le réseau L de rang $2n$ dans l'espace vectoriel V de dimension complexe n).*

En particulier

$$Pf(E) = \dim(S_1) \quad \text{et}$$
$$\dim(S_k) = k^n \quad \text{si } E \text{ est unimodulaire.}$$

Démonstration. Nous supposerons à nouveau E unimodulaire sur L (le cas général s'en déduisant facilement). Nous avons vu que les coefficients de Fourier $a_\lambda(\lambda \in L_2)$ d'une $f \in S_k$ satisfont aux relations de récurrence

$$a_{\lambda + k\mu} = a_\lambda \, e^{i\pi f_\mu(2\lambda + k\mu)} \quad (\mu \in L_2) .$$

Si λ_0 est un élément fixé de L_2, la relation de récurrence précédente impose

$$a_\lambda = a_{\lambda_0} \, e^{i\pi f_\nu(2\lambda_0 + k\nu)} \quad \text{si } \lambda = \lambda_0 + k\nu \in \lambda_0 + kL_2 .$$

Prenons $a_{\lambda_0} = 1$ et montrons que la suite de coefficients de Fourier

$$\begin{cases} a_\lambda = e^{i\pi f_\nu(2\lambda_0 + k\nu)} & \text{pour } \lambda = \lambda_0 + kv \in \lambda_0 + kL_2 \\ a_\lambda = 0 & \text{pour } \lambda \notin \lambda_0 + kL_2 \end{cases}$$

définit bien une fonction $f = \theta_{\lambda_0} \in S_k$ pour $\lambda_0 \in L_2$. Lorsque λ_0 parcourt un système de représentants de L_2 mod kL_2, on obtient évidemment des éléments linéairement indépendants de S_k (les supports des suites de coefficients de Fourier $\lambda \mapsto a_\lambda$ correspondants forment une partition de L_2, donc sont disjoints).

Ces éléments forment une base de S_k d'où

$$\begin{aligned}\dim(S_k) &= [L_2 : kL_2] = [\mathbf{Z}^n : k\mathbf{Z}^n] \\ &= \det(k \cdot id_n) = k^n .\end{aligned}$$

Pour justifier l'affirmation, il s'agit de montrer que la suite de coefficients de Fourier attachée à un choix de $\lambda_0 \in L_2$ satisfait effectivement la relation de récurrence caractérisant les équations fonctionnelles valables dans S_k, puis que la série de Fourier correspondante converge bien vers une fonction entière. Le premier point se vérifie par calcul : prenons $\lambda = \lambda_0 + k\nu \in \lambda_0 + kL_2$ et $\mu \in L_2$

$$a_{\lambda+k\mu} = a_{\lambda_0+k(\nu+\mu)} = \exp\{i\pi f_{\nu+\mu}(2\lambda_0 + k(\nu+\mu))\} .$$

L'exposant vaut (au facteur $i\pi$ près)

$$\begin{aligned}& f_\nu(2\lambda_0+k\nu) + \underbrace{f_\nu(k\mu)}_{f_\mu(k\nu)} + f_\mu(2\lambda_0 + k(\nu+\mu)) \\ &= f_\nu(2\lambda_0+k\nu) + f_\mu(2\lambda_0+2k\nu+k\mu) \\ &= f_\nu(2\lambda_0+k\nu) + f_\mu(2\lambda+k\mu)\end{aligned}$$

d'où bien

$$a_{\lambda+k\mu} = a_\lambda \, e^{i\pi f_\mu(2\lambda+k\mu)} .$$

La décroissance rapide de ces coefficients

$$a_{\lambda_0+k\nu} = e^{2i\pi f_{\lambda_0}(\nu)} \, e^{i\pi k f_\nu(\nu)}$$

est aussi claire puisque le module du premier terme croît comme l'exponentielle d'une fonction linéaire de ν et le deuxième décroît comme une gaussienne (en $\nu \in L_2$). La convergence en z, uniforme sur tout compact de V est alors assurée et la somme de la série de Fourier holomorphe dans V entier. On peut dire plus simplement que l'on construit une fonction θ_0 en prenant $\lambda_0 = 0$ (par une suite de coefficients de Fourier particulièrement simples a_λ, $\lambda \in kL_2$) et que nous obtenons les autres éléments de base de S_k par une translation convenablement tordue de ces coefficients sur les autres classes mod kL_2 de L_2. Il est alors clair que le même principe s'applique dans le cas non unimodulaire en prenant les classes de kL_2 dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})$ et on trouve la formule de dimension annoncée.

Les espaces S_k s'interprètent aussi comme espaces de sections holomorphes de fibrés (holomorphes de rang 1) sur V/L. Le système $(e_\lambda)_{\lambda\in L}$ est un *cocycle* de L à valeurs dans l'espace des fonctions entières ne s'annulant pas sur V. On entend par là qu'on a des relations

$$e_{\lambda+\lambda'}(z) = e_\lambda(z+\lambda') \, e_{\lambda'}(z) \quad (\lambda, \lambda' \in L) .$$

On obtient ces relations en écrivant les équations fonctionnelles satisfaites par

$$\theta(z+\lambda+\lambda') = \theta(z'+\lambda) = e_\lambda(z')\theta(z') \quad (z' = z+\lambda').$$

Le membre de gauche est par définition $e_{\lambda+\lambda'}(z)\theta(z)$ et celui de droite $e_\lambda(z')e_{\lambda'}(z)\theta(z)$. Puisque θ n'est pas identiquement nulle, on peut simplifier par cette fonction obtenant les relations de cocycle par prolongement analytique à partir de l'ouvert non vide où $\theta \neq 0$. Les systèmes $(e_\lambda^k)_{\lambda\in L}$ sont naturellement aussi des cocycles de L. Montrons comment on définit un fibré holomorphe de rang 1 à partir d'un cocycle. Prenons par exemple le cocycle (e_λ). Sur le fibré trivial $V \times \mathbf{C} \to V$, le groupe discret L agit (de façon équivariante) par

$$\lambda \cdot (z, t) = (z + \lambda, e_\lambda(z)t) \quad (\lambda\in L, z\in V, t\in\mathbf{C})$$

(l'action sur la base étant simplement donnée par les translations). L'espace des orbites

$$[z, t] = \text{orbite de } (z, t)$$

est un fibré sur V/L:

$$\begin{array}{ccccc} V \times \mathbf{C} & \to & V \times_L \mathbf{C} & \ni [z, t] = [z + \lambda, e_\lambda(z)t] \\ \downarrow & & \downarrow & \\ V & \to & V/L & \ni \dot{z}(=\dot{z}+\lambda). \end{array}$$

Ses sections sont les applications de la forme $\dot{z} \mapsto [\dot{z}, \theta(z)]$. Par définition de la relation d'équivalence

$$[\dot{z}, \theta(z)] = [\dot{z} + \lambda, e_\lambda(z)\theta(z)]$$

et ce point s'exprime aussi par $[\dot{z} + \lambda, \theta(z+\lambda)]$ d'où les relations fonctionnelles satisfaites par θ. La continuité (resp. l'holomorphie) d'une telle section s'exprime par la continuité (resp. l'holomorphie) de θ sur V. A chaque cocycle de L à valeurs dans l'espace des fonctions entières ne s'annulant pas sur V, on associe ainsi un fibré inversible, i.e. un élément de $H^1(V/L, \mathcal{O}^\times)$ (ce groupe abélien est en général noté additivement, mais lorsqu'on interprète ses éléments comme des fibrés inversibles, la loi de groupe est donnée par le produit tensoriel des fibrés: l'*inverse* d'un fibré s'identifiant au fibré dual). La construction précédente fournit un homomorphisme

$$H^1(L, \Gamma(V, \pi^*\mathcal{O}^\times)) \to H^1(V/L, \mathcal{O}^\times).$$

Ici, $\mathcal{O}^\times$ représente le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur V/L, $\pi: V \to V/L$ est la projection canonique de sorte que l'image inverse $\pi^*\mathcal{O}^\times$

est le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur V, ayant pour sections globales les éléments de

$$\Gamma(V, \pi^*\mathcal{O}^\times) = H^0(V, \pi^*\mathcal{O}^\times) = \{f : V \to \mathbf{C}^\times \text{ entière}\}.$$

Plus généralement, Grothendieck définit des flèches

$$H^p(G, \Gamma(X, \pi^*\mathcal{F})) \to H^p(G\backslash X, \mathcal{F})$$

dans le cas d'un groupe discret G agissant (continument, librement et proprement) sur un espace topologique (pas trop mauvais)... (cf. Mumford [1] p. 22 qui se réfère à Grothendieck [1], spécialement p. 195).

Lorsqu'on interprète ainsi S_k comme espace de sections du fibré $\mathcal{L}^k$ correspondant au cocycle $(e_\lambda^k)_{\lambda\in L}$

$$S_k = \Gamma(V/L, \mathcal{L}^k) = H^0(V/L, \mathcal{L}^k),$$

la finitude de la dimension de S_k résulte d'un théorème de Kodaira. Le vanishing theorem de Kodaira donne d'ailleurs aussi

$$H^i(V/L, \mathcal{L}) = 0 \quad \text{pour } i > 0$$

($\mathcal{L}$ est un fibré *positif* et la *classe canonique* $K_{V/L}$ est nulle puisque V/L est parallélisable de sorte qu'il existe des formes différentielles invariantes par translation, de diviseur vide). Il en résulte que la caractéristique d'Euler-Poincaré holomorphe

$$\Sigma(-1)^i \dim H^i(V/L, \mathcal{L}) = \dim H^0(V/L, \mathcal{L})$$

se réduit à la dimension de S_1. Le théorème de Riemann-Roch permet de retrouver cette dimension à partir de la première classe de Chern de $\mathcal{L}$. Ces remarques ont pour but de montrer comment les principales étapes de la démonstration analytique s'insèrent dans un contexte général.

Passons à quelques commentaires concernant le cas $n = 1$, L étant ainsi un réseau de la droite complexe $\mathbf{C}$. Le théorème de plongement à l'aide des fonctions θ de S_3 se réalise dans un espace projectif de dimension $m = \dim(S_3) - 1 = 3^n - 1$ (la dimension de S_k est donnée par la proposition ci-dessus), donc de dimension 2 lorsque $n = 1$. On obtient ainsi les modèles de $\mathbf{C}/L$ comme courbes projectives planes. Il est plus facile dans ce cas de travailler avec les fonctions de Weierstrass $\wp$ et $\wp'$. Rappelons simplement que $\wp$ est définie comme somme d'une série de fonctions méromorphes

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\lambda\in L} \left\{\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right\}.$$

Il est clair par construction que l'ensemble des pôles de $\wp$ est L-invariant (en dimension $n > 1$, les diviseurs ont une dimension >0 et il n'est guère possible de sommer les translatées d'une fonction méromorphe sur V pour obtenir une fonction méromorphe sur V/L). En particulier, $\wp$ a un pôle double en chaque point du réseau L. Sa dérivée $\wp'$ a un pôle triple en ces mêmes points. On peut voir que $\wp$ est un quotient de deux fonctions theta de S_2 et que $\wp'$ est un quotient de deux fonctions de S_3. Une base de S_2 a d'ailleurs deux éléments et fournit une application projective sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, donc sur la sphère de Riemann. Cette application identifie les points z et $-z$ et est un revêtement (les quatre points de $\frac{1}{2}L/L$ étant ramifiés).

Toujours dans le cas $n = 1$, montrons comment la fonction theta de Riemann s'apparente aux fonctions theta de Jacobi. La série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \quad (q \in \mathbf{C})$$

converge pour $|q| < 1$. Son carré est

$$\sum q^{n^2+m^2} = \sum_{N \geqslant 0} c_N q^N$$

où c_N dénote le nombre de couples $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ avec $n^2 + m^2 = N$. De même, la puissance quatrième de $\Sigma\, q^{n^2}$ est la fonction génératrice du nombre de représentations d'un entier positif comme somme de quatre carrés parfaits. Pour calculer ces fonctions, Jacobi a posé $q = e^{i\pi\tau}(\operatorname{Im} \tau > 0 \Rightarrow |q| < 1)$

$$\theta(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau}.$$

Plus généralement, il étudie les fonctions

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau}\, e^{2i\pi n z}$$

dont la précédente est la valeur en $z = 0$ (theta nullwert). La série de Fourier de Riemann est donc exactement de ce type: $L = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$, $L_1 = \mathbf{Z}$, $L_2 = \tau\mathbf{Z}$.

4. Partie cohomologique de la démonstration

Nous allons démontrer ici que si le tore complexe V/L est une *variété abélienne*, il existe un produit scalaire hilbertien sur V de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de L. L'idée de la démonstration est simple. Partant d'un plongement projectif

$$i: V/L \to \mathbf{P}^m,$$