5. Commentaires concernant la partie cohomologique de la démonstration

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Commentaires concernant la partie cohomologique de la démonstration

C'est la partie cohomologique de la preuve (section précédente) qui permet de donner un exemple de tore complexe non projectif (cf. sec. 1, remarque 4). Il est plus facile de construire une variété analytique (lisse) compacte non projective. A cet effet, on peut construire les *surfaces de Hopf* comme suit. On regarde le corps des quaternions réels

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$$

($i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k, \ldots$) comme espace vectoriel complexe de dimension 2

$$\mathbf{H} = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i) \oplus (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i)j = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j\,.$$

On choisit ensuite un quaternion réel $\gamma > 1$ de sorte que le sous-groupe

$$\Gamma = \{\gamma^n : n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{H}^\times$$

du groupe multiplicatif des quaternions non nuls est discret (donc fermé). L'espace homogène

$$X_\gamma = \mathbf{H}^\times/\Gamma \quad (\dim_{\mathbf{C}} X_\gamma = 2)$$

est une variété analytique (lisse) compacte (c'est même un groupe de Lie complexe puisque γ est réel, donc Γ contenu dans le centre de $\mathbf{H}^\times$). La décomposition polaire

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\times &\to S^3 \times \mathbf{R}_+^\times \\ q &\mapsto (q/|q|, |q|) \end{aligned}$$

où S^3 dénote la sphère unité de l'espace $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$, est un difféomorphisme. Elle induit un difféomorphisme

$$X_\gamma \xrightarrow{\sim} S^3 \times \mathbf{R}_+^\times/\Gamma = S^3 \times S^1\,.$$

Comme l'homologie d'une sphère est donnée par la décomposition cellulaire

$$S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\} \text{ (opérateur bord trivial)},$$
$$H_i(S^n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \text{ si } i = 0 \text{ ou } n,\ H_i = 0 \text{ sinon},$$

la formule de Künneth permet de calculer l'homologie de X_γ (l'homologie des sphères est sans *torsion*; d'ailleurs, il suffirait de calculer l'homologie sur un corps, par exemple **Q**, **R** ou **C**). En particulier

$$H_k(S^1) \otimes H_l(S^3) = 0 \text{ pour } k + l = 2$$

implique

$$H_2(X_\gamma) = H_2(S^1 \times S^3) = 0$$

puis $H^2(X_\gamma, \mathbf{C}) = 0$. Mais, *pour toute variété projective* X, *on a* $H^2(X, \mathbf{C}) \neq 0$. En effet, si X est plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, la restriction de la forme de Fubini-Study de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ à X fournit une 2-forme fermée positive ω sur X dont la classe de cohomologie est non nulle $0 \neq [\omega] \in H^2(X, \mathbf{C})$ (si la forme ω était exacte, toutes les puissances extérieures $\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ seraient aussi exactes et en particulier, considérant la puissance égale à la dimension complexe de X, $\int_X \omega \wedge \ldots \wedge \omega = 0$ ce qui n'est pas le cas, puisque cette puissance extérieure est une forme volume sur X : l'intégrale précédente est positive — on suppose naturellement $\dim_{\mathbf{C}} X > 0$!).

Puisque tous les tores sont difféomorphes, on ne peut trouver d'obstruction à un plongement projectif aussi simple que pour les surfaces de Hopf. Il a été nécessaire de faire intervenir l'*intégralité* de la forme de Fubini-Study. L'homologie d'un tore, i.e. d'un produit de cercles, est aussi donnée par la formule de Künneth (l'homologie d'un cercle S^1 étant sans torsion, l'homologie du tore est engendrée par H_1)[1]). Mais les calculs faits dans la section précédente permettent d'être même plus explicites. Prenons en effet un tore V/L et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant \dim_{\mathbf{R}}(V)$. Toute forme différentielle de degré k sur V/L peut être considérée comme k-forme L-périodique sur V et développée en série de Fourier. Seuls les termes constants de la série de Fourier nous intéressent (toute forme fermée est cohomologue à ses termes constants). Par restriction à l'origine, on obtient donc une k-forme alternée sur V. On en déduit les isomorphismes

$$H^k(V/L, \mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^k(V, \mathbf{R}) = \wedge^k V^*$$

puis

$$\dim_{\mathbf{R}} H^k(V/L, \mathbf{R}) = \binom{n}{k} \qquad \text{si } n = \dim_{\mathbf{R}}(V).$$

Lorsqu'on désire établir des isomorphismes analogues sur **Z**, on doit utiliser

[1]) Puisque V est contractible, $V \to V/L$ s'identifie au revêtement universel du tore V/L et $\pi_1(V/L) \cong L$. En particulier $H_1(V/L, \mathbf{Z}) \cong L$.

la formule de Künneth. Par exemple, pour $k = 2$, le théorème de Künneth montre que les 2-cellules entières

$$c_{\lambda\mu}: (s, t) \to s\lambda + t\mu \bmod L \qquad (\lambda, \mu \in L)$$
$$[0, 1]^2 \to V/L$$

engendrent $H_2(V/L, \mathbf{Z})$ (dans la sec. 4 nous n'avons utilisé que l'intégralité de ces cellules particulières). L'intégralité d'une 2-forme alternée sur L *caractérise* les éléments de $H^2(V/L, \mathbf{Z})$.

La construction transcendante des surfaces de Hopf présente tout de même quelque analogie avec celle des tores complexes (de dimension 2). En effet, lorsque $\dim_{\mathbf{C}}(V) = 2$, on peut effectuer un quotient par un réseau L en deux temps. Choisissant d'abord une base complexe de V dans un système de générateurs de L, on peut identifier V à $\mathbf{C}^2$ et un facteur direct L_1 de L à $\mathbf{Z}^2$. Donc

$$V/L = V/L_1 \oplus L_2 = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \Big/ L_2'$$

où L_2' dénote le sous-groupe image de L_2 dans le quotient. Avec l'exponentielle normalisée

$$\underline{e}(z) = \exp(2\pi i z),$$

on peut identifier $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ à $\mathbf{C}^\times$ et

$$V/L \cong \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times/L_2'$$

où L_2' est un sous-groupe discret (de rang 2) de $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$. Les surfaces de Hopf étaient obtenues comme quotient de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} - (0, 0)$ par un sous-groupe discret (de rang 1 de $\mathbf{H}^\times$).

La principale différence entre les deux situations envisagées provient du fait que les tores complexes sont toujours *kählériens*, et en particulier leur H^2 est non nul, tandis que les surfaces de Hopf ne le sont pas.

6. Classification de variétés abéliennes

Commençons par déterminer les applications holomorphes entre tores complexes.

Proposition. *Soient V/L et V'/L' deux tores complexes et $f: V/L \to V'/L'$ une application holomorphe. Alors $f(v) = f_0(v)\, f(0)$ où f_0 est un homomorphisme provenant d'une application* $\mathbf{C}$*-linéaire $F: V \to V'$ telle que $F(L) \subset L'$.*