6. Classification de variétés abéliennes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

la formule de Künneth. Par exemple, pour $k = 2$, le théorème de Künneth montre que les 2-cellules entières

$$c_{\lambda\mu}: (s, t) \to s\lambda + t\mu \bmod L \qquad (\lambda, \mu \in L)$$
$$[0, 1]^2 \to V/L$$

engendrent $H_2(V/L, \mathbf{Z})$ (dans la sec. 4 nous n'avons utilisé que l'intégralité de ces cellules particulières). L'intégralité d'une 2-forme alternée sur L *caractérise* les éléments de $H^2(V/L, \mathbf{Z})$.

La construction transcendante des surfaces de Hopf présente tout de même quelque analogie avec celle des tores complexes (de dimension 2). En effet, lorsque $\dim_{\mathbf{C}}(V) = 2$, on peut effectuer un quotient par un réseau L en deux temps. Choisissant d'abord une base complexe de V dans un système de générateurs de L, on peut identifier V à $\mathbf{C}^2$ et un facteur direct L_1 de L à $\mathbf{Z}^2$. Donc

$$V/L = V/L_1 \oplus L_2 = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \Big/ L_2'$$

où L_2' dénote le sous-groupe image de L_2 dans le quotient. Avec l'exponentielle normalisée

$$\underline{e}(z) = \exp(2\pi i z),$$

on peut identifier $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ à $\mathbf{C}^\times$ et

$$V/L \cong \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times/L_2'$$

où L_2' est un sous-groupe discret (de rang 2) de $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$. Les surfaces de Hopf étaient obtenues comme quotient de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} - (0, 0)$ par un sous-groupe discret (de rang 1 de $\mathbf{H}^\times$).

La principale différence entre les deux situations envisagées provient du fait que les tores complexes sont toujours *kählériens*, et en particulier leur H^2 est non nul, tandis que les surfaces de Hopf ne le sont pas.

6. Classification de variétés abéliennes

Commençons par déterminer les applications holomorphes entre tores complexes.

Proposition. *Soient V/L et V'/L' deux tores complexes et $f: V/L \to V'/L'$ une application holomorphe. Alors $f(v) = f_0(v)\, f(0)$ où f_0 est un homomorphisme provenant d'une application* $\mathbf{C}$*-linéaire $F: V \to V'$ telle que $F(L) \subset L'$.*

Démonstration. Remplaçant f par $f - f(0)$, on peut supposer $f(0)$ nul (dans V'/L') puis relever la composée

$$V \to V/L \xrightarrow{f} V'/L'$$

au revêtement universel V' de V'/L':

$$\begin{tikzcd} & V' \arrow[d] \\ V \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[r] & V'/L' . \end{tikzcd}$$

Choisissons même *le* relèvement F tel que $F(0) = 0$. Comme les points z et $z + \lambda (\lambda \in L)$ ont même image (dans V/L), la différence $F(z+\lambda) - F(z)$ doit être un élément de L' et l'application (continue!) $z \mapsto F(z+\lambda) - F(z)$ envoie l'espace connexe V dans l'espace discret L': elle est constante et on a

$$F(z+\lambda) = F(z) + c_\lambda \quad (c_\lambda = F(\lambda)) .$$

Les dérivées partielles de F (par rapport à une base de V) sont ainsi holomorphes et L-périodiques donc bornées. Le théorème de Liouville montre qu'elles doivent être constantes et F est $(\mathbf{C})$-linéaire (linéaire homogène si on a choisi $F(0)$ nul).

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que lorsque

$$f : V/L \to V'/L'$$

est un homomorphisme holomorphe, le relèvement $F : V \to V'$ a une restriction $F_f : L \to L'$ additive (i.e. $\mathbf{Z}$-linéaire) qui caractérise complètement F et f. Ainsi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{hol}(V/L, V'/L') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(L, L') \\ f & \mapsto & F_f \end{array}$$

est *bijective*. En particulier, si $L = L'$,

$$\mathrm{End}_{hol}(V/L) \cong \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(L) \cong \mathrm{End}(\mathbf{Z}^n) = M_n(\mathbf{Z})$$

et

$$\mathrm{Aut}_{hol}(V/L) \cong \mathrm{Aut}(L) \cong Gl(\mathbf{Z}^n) = Gl_n(\mathbf{Z}) .$$

Passons aux variétés abéliennes. Lorsque $A = V/L$ est une telle variété, il existe une forme alternée

$$E : L \times L \to \mathbf{Z} \quad (\text{ou } \wedge^2 L \to \mathbf{Z})$$

dont l'extension **R**-bilinéaire (encore notée E) $V \times V \to \mathbf{R}$ satisfait

$$\begin{cases} E(u, iu) > 0 \quad \text{si } 0 \neq u \in V, \\ E(iu, iv) = E(u, v) \quad (u, v \in V) \end{cases}$$

(cf. sec. 2), et il est plus intéressant de classer les couples (A, E). On peut observer que L se déduit intrinsèquement de A par formation de l'homologie (entière)

$$A \mapsto \pi_1(A) = H_1(A, \mathbf{Z}) = H_1(A),$$

de sorte que dans la donnée (A, E), on peut considérer que E est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\wedge^2 H_1(A), \mathbf{Z}).$$

Un tel élément E, ayant les propriétés indiquées ci-dessus est appelé *polarisation* de A et le couple (A, E) est une *variété abélienne polarisée*. Lorsque E est unimodulaire, on dit que la polarisation est *principale* et A est *polarisée principalement* par la donnée de E.

Remarque. Choisissant une base $(e_i, \lambda_j)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ de L dans laquelle E s'exprime sous forme réduite de Frobenius

$$\begin{cases} E(e_i, e_j) = E(\lambda_i, \lambda_j) = 0, \\ E(e_i, \lambda_j) = \delta_{ij} d_i \quad (d_{i+1} \text{ multiple de } d_i \text{ pour } 1 \leqslant i < n), \end{cases}$$

on voit que E peut être considérée comme forme unimodulaire sur le réseau L' engendré par les e_i et les λ_j/d_j, de sorte que $A' = V/L'$ est polarisée principalement (par E). Le noyau de la projection canonique $A \to A'$ (correspondant à l'inclusion $L \subset L'$) est fini et d'ordre $\Pi d_j (= Pf(E))$, et A apparaît comme revêtement fini de la variété abélienne principalement polarisée A'. Similairement, on peut construire un réseau $L'' \subset L$ et une multiple $\frac{1}{m}E$ unimodulaire, d'où un revêtement fini $A'' \to A$ principalement polarisé. De façon générale, on peut donc dire que toute variété abélienne A est « comprise entre » deux variétés abéliennes principalement polarisées

$$A'' \to A \to A' \quad \text{(revêtements : noyaux finis)}.$$

Conservons donc les notations précédentes en supposant que le réseau L de V est muni d'une polarisation principale E. La base *symplectique* choisie

$$(e_1, \ldots, e_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

sera dénotée plus simplement $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$ ou (e) (de sorte que $\lambda_j = e_{j+n}$). On a donc par hypothèse

$$E(e_i, e_j) = E(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0\,,$$
$$E(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n)\,.$$

Il sera utile de travailler dans une autre base $(e') = (e'_j)_{1 \leqslant j \leqslant 2n}$ de l'espace vectoriel réel $V_{\mathbf{R}}$ sous-jacent à V (restriction des scalaires à $\mathbf{R}$) définie comme suit

$$(e') = (ie_1, \ldots, ie_n, e_1, \ldots, e_n) \quad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Dans cette base (e'), la matrice J de la multiplication par $i = \sqrt{-1}$ dans $V_{\mathbf{R}}$ est donnée par

$$ie'_j = i^2 e_j = -e'_{n+j}\,,$$
$$ie'_{n+j} = ie_j = e'_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)\,,$$

d'où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbf{Z})\,.$$

En accord avec les notations de la sec. 2, notons V_1 le sous-espace vectoriel réel (de dimension n) engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. La forme alternée E est isotrope sur V_1 et sur iV_1 (invariance par multiplication par i). Donc la matrice représentative de E dans la base (e') a la forme

$$E : \begin{pmatrix} 0 & -{}^tF \\ F & 0 \end{pmatrix}.$$

En identifiant E à sa matrice représentative, l'invariance par multiplication par i se traduit plus précisément par la relation [1])

$${}^tJEJ = E\,.$$

Effectuant les produits matriciels par blocs, on trouve l'identité

$$\begin{pmatrix} 0 & -F \\ {}^tF & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tF \\ F & 0 \end{pmatrix}$$

[1]) Identifiant u et v à des vecteurs colonnes dans la base (e'), on écrit $E(u, v) = {}^tu \cdot E \cdot v$ (produits matriciels lignes par colonnes!).

qui montre que F doit être *symétrique* et E est donnée par la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{pmatrix} \text{ antisymétrique } \quad (F \text{ symétrique}).$$

La positivité de E s'exprime aussi facilement:

$$u \neq 0 \Rightarrow 0 < E(u, iu) = {}^t uEJu$$

d'où EJ définie positive. Mais la matrice EJ est simplement $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$. Donc

$$F \text{ est symétrique définie positive}.$$

Les formes **C**-linéaires coordonnées de V dans la base $(e_1, ..., e_n)$ ont été dénotées par f_j: ce sont les extensions **C**-linéaires des

$$v \mapsto E(v, \lambda_j) : V_1 \to \mathbf{R}.$$

Elles satisfont bien aux relations $f_j(e_k) = \delta_{jk}$ qui montrent que

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(z) e_j : f_j(z) = z_j.$$

Prenant en particulier $z = \lambda_k$ on va écrire

$$\lambda_k = \sum f_j(\lambda_k) e_j = \sum z_{jk} e_j = \sum (x_{jk} + i y_{jk}) e_j$$

puis

$$\lambda_k = \sum y_{jk} i e_j + \sum x_{jk} e_j$$

qui fournissent les composantes des vecteurs λ_k dans la base (e'). Posons

$$(z_{jk}) = Z = X + iY = (x_{jk}) + i(y_{jk}).$$

Les composantes des λ_k sont les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ (matrice $2n \times n$ réelle). Les relations $E(e_i, \lambda_j) = \delta_{ij}$ (rappelons que nous supposons E unimodulaire) peuvent être rassemblées sous la forme matricielle

$$(0 \quad 1_n)\, E \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = (0 \quad 1_n) \begin{pmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = 1_n \in M_n(\mathbf{R}).$$

Effectuons ce produit par blocs

$$FY = (F \quad 0) \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = 1_n.$$

Cela prouve que la matrice Y est inversible, d'inverse F: $Y^{-1} = F$.[1]) En particulier, Y est symétrique. L'isotropie de E sur l'espace engendré par les vecteurs λ_k s'exprime de façon analogue

$$0 = ({}^tY \quad {}^tX)\, E\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = (Y \quad {}^tX)\begin{pmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$$

$$= ({}^tXF \quad -YF)\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tXFY = YFX\,.$$

Puisque $FY = YF = 1$, la relation précédente montre que X est aussi symétrique. En fait, nous savions déjà que $Z = X + iY$ est symétrique (lemme de sec. 2 utilisé pour démontrer les équations fonctionnelles de θ). La positivité de E a fourni $F \gg 0$ que nous pouvons exprimer de façon équivalente par $Y = F^{-1} \gg 0$. En résumé, le choix d'une base symplectique de L nous a permis de construire une matrice symétrique $Z \in M_n(\mathbf{C})$ de partie imaginaire définie positive.

Définition. On appelle demi-plan généralisé de Siegel H_n l'espace formé des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{C})$ de partie imaginaire définie positive

$$H_n = \{Z \in M_n(\mathbf{C}) : {}^tZ = Z \text{ et } \operatorname{Im}(Z) \gg 0\}\,.$$

Identifions V à $\mathbf{C}^n$ par le choix de base $e_1, \ldots, e_n$. Le réseau L apparaît alors comme engendré par $\mathbf{Z}^n$ et les colonnes (ou lignes!) de la matrice Z. Inversement, montrons comment *toute* matrice $Z \in H_n$ fournit un réseau L (engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base canonique de $\mathbf{C}^n$ et les colonnes de Z) pour lequel $\mathbf{C}^n/L$ possède une polarisation principale (donc *est une variété abélienne*). Il s'agit de trouver une forme hermitienne sur $\mathbf{C}^n$ dont la partie imaginaire soit unimodulaire sur L. L'examen du cas trivial $n = 1$ indique comment procéder : il s'agit de diviser la forme hermitienne canonique ${}^t\bar{u}v$ par la partie imaginaire de $z(= Z)$. Je prétends que la forme hermitienne sur $\mathbf{C}^n$ donnée par la matrice réelle symétrique Y^{-1} a les propriétés requises. Cette forme hermitienne est donc donnée (pour des vecteurs colonnes u et v de $\mathbf{C}^n$) par

$$H(u, v) = {}^t\bar{u}Y^{-1}v\,.$$

Puisque Y^{-1} est symétrique réelle et définie positive, H est bien un produit scalaire hilbertien et $E = \operatorname{Im}(H)$ est automatiquement $\mathbf{R}$-bilinéaire alternée, invariante par multiplication par i et *positive*. Il ne reste qu'à en vérifier

[1]) En dimension *finie*, $FY = 1_n \Rightarrow Y$ injective $\Rightarrow Y$ inversible.

l'intégralité et l'unimodularité. Ecrivons encore $L = L_1 \oplus L_2$ avec $L_1 = \mathbf{Z}^n$ et L_2 engendré par les colonnes de Z. Puisque Y est une matrice réelle, H sera réelle sur L_1 et E nulle sur ce sous-réseau. De même si λ_k désigne la k^e colonne de Z, les produits scalaires

$$H(\lambda_j, \lambda_k) = {}^t\bar{\lambda}_j Y^{-1}\lambda_k$$

sont les coefficients matriciels de

$$\begin{aligned} {}^t\bar{Z}Y^{-1}Z &= \bar{Z}Y^{-1}Z = (X-iY)Y^{-1}(X+iY) \\ &= (X-iY)(Y^{-1}X+iI_n) = \text{réel} + i(X-YY^{-1}X) = \text{réel}\,. \end{aligned}$$

Les $E(\lambda_j, \lambda_k) = 0$ sont des entiers! Finalement, les $H(e_j, \lambda_k) = {}^te_jY^{-1}\lambda_k$ sont les coefficients matriciels de

$$IY^{-1}Z = Y^{-1}(X+iY) = Y^{-1}X + iI_n\,,$$

d'où

$$E(e_j, \lambda_k) =)j, k)^e \text{ coefficient de } I_n = \delta_{jk}\,.$$

L'intégralité et l'unimodularité de E sur L sont donc prouvées. Plus précisément, la forme alternée E prend les valeurs normalisées sur les couples de vecteurs de base e_j, λ_k tout comme la forme initiale ayant conduit à la matrice Z: les deux constructions sont bien inverses l'une de l'autre.

Il ne reste qu'à déterminer quand deux matrices Z et $Z' \in H_n$ fournissent des variétés abéliennes principalement polarisées isomorphes. Par là, on entend naturellement que les couples correspondants (A, E) et (A', E') sont isomorphes: il existe un isomorphisme analytique $f : A \to A'$ qui transporte la forme E sur E'

$$\begin{aligned} g = g_f &: L \to L' \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in L) \\ g &: V \to V' \qquad E'(g\lambda_1, g\lambda_2) = E(\lambda_1, \lambda_2) \\ f &: A \to A' \end{aligned}$$

Pour trouver cette condition sous la forme usuelle, nous identifierons les éléments de $\mathbf{C}^n$ à des vecteurs *lignes*. Le réseau L est engendré par les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{C}^n$ et par les vecteurs lignes de Z (ibid. pour L'). La condition d'isomorphie (analytique) des tores complexes $\mathbf{C}^n/L$ et $\mathbf{C}^n/L'$ donnée au début de cette section revient à l'existence d'un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathbf{C}^n$ appliquant L sur L'. Par notre convention de regarder maintenant les vecteurs de $\mathbf{C}^n$ comme des lignes, l'action de la matrice représentative de g est donnée par une multiplication matricielle à droite: $g(u) = uM_g$. L'isomorphisme en question s'exprime par

$$L' = L \cdot M_g \quad (M_g \in Gl_n(\mathbf{C}))\,.$$

La base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$ de L (e_{n+k} étant la k^e ligne de Z) est envoyée sur une base de L': $(e_i M_g)_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$ est une base de L'. Il y a donc une matrice $\gamma \in Gl_{2n}(\mathbf{Z})$ effectuant le passage entre les deux bases de L'

$$e'_j = \sum \gamma_{jk}\, e_k M_g \quad (e'_j = e_j \text{ pour } j = 1, ..., n)\,.$$

Ecrivant ces relations linéaires l'une au-dessous de l'autre, on obtient l'identité matricielle

$$\begin{pmatrix} Z' \\ I \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} ZM \\ IM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ZM \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AZ+B)M \\ (CZ+D)M \end{pmatrix}$$

($M = M_g$ et γ désignant la matrice (γ_{jk}) écrite dans un ordre convenable! [1])). On en tire

$$CZ + D \text{ inversible et } (CZ+D)^{-1} = M\,,$$

puis

$$Z' = (AZ+B)M = (AZ+B)\,(CZ+D)^{-1}$$

avec

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Gl_{2n}(\mathbf{Z})\,.$$

Lorsque γ est compatible aux polarisations, les deux bases (e'_j) et $(e_j M)$ sont symplectiques et γ envoie la seconde dans la première. La matrice de E' étant J dans ces deux bases, on doit avoir

$${}^t\gamma J \gamma = J\,.$$

Définition. Le *groupe symplectique* Sp_n est le sous-groupe de Gl_{2n} défini par

$$g \in Sp_n \Leftrightarrow g \in Gl_{2n} \text{ et } {}^t g J g = J\,.$$

On parlera ainsi du *groupe symplectique réel* $Sp_n(\mathbf{R})$, du *groupe symplectique entier* $Sp_n(\mathbf{Z})$, ... Si g est une matrice symplectique, on a

$$\det(g)^2 = \det({}^t g J g) = \det(J) = 1\,,$$

d'où $\det(g) = \pm 1$. Plus précisément, utilisant le pfaffien (défini sur les matrices alternées et caractérisé par les conditions

$$\det(E) = Pf(E)^2,\ Pf(J) = +1,\ Pf({}^t g E g) = \det(g) Pf(E)\ ),$$

---

[1]) Plus précisément $(\gamma_{jk}) = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

on voit que le déterminant d'une matrice symplectique est $+1$:

$$Sp_n \subset Sl_{2n}\ ^{1)}.$$

Pour pouvoir formuler proprement la condition d'isomorphie des variétés abéliennes principalement polarisées correspondant aux matrices Z et $Z' \in H_n$, il faut introduire l'action de $Sp_n(\mathbf{R})$ ou $Sp_n(\mathbf{Z})$ dans H_n.

PROPOSITION. *Soient* $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbf{R})$ *et* $Z \in H_n$. *Alors* $CZ + D$ *est inversible et*

$$g \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in H_n .$$

De plus, $(g, Z) \mapsto g \cdot Z$ *définit une action continue et propre de* $Sp_n(\mathbf{R})$ *dans* H_n.

Pour ne pas interrompre le cours normal de nos déductions, renvoyons la démonstration de cette proposition à la fin de la section.

Le théorème de classification est le suivant.

THÉORÈME. *A toute matrice* $Z \in H_n$, *on associe la variété abélienne principalement polarisée* (A, E) *définie comme suit:*

$$\begin{cases} A = \mathbf{C}^n/L \text{ où } L \text{ est le réseau engendré par la base canonique de } \mathbf{C}^n \text{ et les} \\ \qquad \text{colonnes (ou lignes) de } Z, \\ E = \text{partie imaginaire de la forme hermitienne } H \text{ donnée par la matrice} \\ \qquad \text{(réelle) } Y^{-1} \text{ dans la base canonique } (Y = \mathrm{Im}(Z)). \end{cases}$$

Alors, pour toute $\gamma \in Sp_n(\mathbf{Z})$, *les variétés abéliennes principalement polarisées correspondant à* Z *et* $\gamma \cdot Z$ *sont isomorphes et l'association*

$$Z \mapsto (A, E)$$

définit une bijection

$$Sp_n(\mathbf{Z})\backslash H_n \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphismes de variétés} \\ \text{abéliennes principalement polarisées} \end{array} \right\}.$$

Autrement dit, le réseau L associé à $Z \in H_n$ est somme de $\mathbf{Z}^n$ et de $Z\mathbf{Z}^n$ (ou $\mathbf{Z}^n Z$ selon qu'on travaille avec des vecteurs lignes ou colonnes!), et

$$E(u, v) = \mathrm{Im}({}^t\bar{u}Y^{-1}v) = \frac{1}{2i}({}^t\bar{u}Y^{-1}v - {}^tuY^{-1}\bar{v})\ .^{2)}$$

---

[1]) On montre sans peine que $Sp_1 = Sl_2$.

[2]) Il serait plus cohérent de travailler avec des vecteurs lignes u et v et donc d'écrire $E(u, v) = Im(\bar{u}Y^{-1}{}^tv)$.

On a déjà démontré que si les variétés abéliennes principalement polarisées (A, E) et (A', E') correspondant aux matrices Z et $Z' \in H_n$ sont isomorphes, il existe $\gamma \in Sp_n(\mathbf{Z})$ avec $Z' = \gamma \cdot Z$. Un instant de réflexion montre que les constructions peuvent être renversées

$$(A, E) \cong (A', E') \Leftrightarrow \exists\, \gamma \in Sp_n(\mathbf{Z}) : Z' = \gamma \cdot Z .$$

Le théorème est alors complètement démontré.

Revenons à la démonstration de la proposition.

Lorsque $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est symplectique, i.e. ${}^t g J g = J$, on doit avoir

(*) $\qquad {}^tAC$ et ${}^tBC$ symétriques, ${}^tAD - {}^tCB = I\ (= 1_n)$. [1])

Pour $Z \in M_n(\mathbf{C})$ symétrique, on peut calculer

$$(CZ+D)^*(AZ+B) = (\bar{Z}{}^tC + {}^tD)(AZ+B) .$$

On trouve

$$\bar{Z}({}^tCA)Z + \bar{Z}({}^tCB) + ({}^tDA)Z + {}^tDB$$

et en utilisant les relations (*)

$$\bar{Z}({}^tCA)Z + \bar{Z}({}^tCB) + Z + ({}^tBC)Z + {}^tDB .$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} &(AZ+B)^*(CZ+D) \\ &= \bar{Z}({}^tAC)Z + \bar{Z} + \bar{Z}({}^tCB) + ({}^tBC)Z + {}^tBD . \end{aligned}$$

Soustrayant terme à terme (et utilisant encore la symétrie donnée par (*))

$$\begin{aligned} &(CZ+D)^*(AZ+B) - (AZ+B)^*(CZ+D) \\ &= Z - \bar{Z} = 2i\, Y . \end{aligned}$$

Si $Y \gg 0$, prenant un vecteur colonne complexe u,

$$\begin{aligned} (CZ+D)u = 0 &\Rightarrow {}^t\bar{u}(CZ+D)^* = 0 \\ &\Rightarrow 2i\, {}^t\bar{u} Y u = 0 \Rightarrow u = 0 . \end{aligned}$$

---

[1]) Donc $A = I \Rightarrow C$ symétrique; $D = I \Rightarrow B$ symétrique; A ou D nul $\Rightarrow B$ et C inversibles; B ou C nul $\Rightarrow A$ et D inversibles; $J \in Sp_n(\mathbf{R})$.

Donc $Y \gg 0 \Rightarrow CZ + D$ injective $\Rightarrow CZ + D$ inversible. Pour $Z \in H_n$, on peut donc définir

$$g \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \text{ si } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbf{R}) .$$

Observons encore

$$\begin{aligned} & {}^t(CZ+D)\big(g \cdot Z - {}^t(g \cdot Z)\big)(CZ+D) \\ &= {}^t(CZ+D)(AZ+B) - {}^t(AZ+B)(CZ+D) \\ &= Z - {}^tZ = 0 \end{aligned}$$

par un calcul analogue à celui qui vient d'être fait. Donc $g \cdot Z$ est symétrique. Ecrivons $g \cdot Z = X' + iY'$ et montrons que Y' est définie positive

$$\begin{aligned} & (CZ+D)^* \, Y'(CZ+D) \\ &= \frac{1}{2i}(\bar{Z}{}^tC + {}^tD)\big(g \cdot Z - (g \cdot Z)^*\big)(CZ+D) = Y \gg 0 . \end{aligned}$$

Donc $g \cdot Z \in H_n$ et il en résulte immédiatement que $(g, Z) \mapsto g \cdot Z$ définit une action continue de $Sp_n(\mathbf{R})$ dans H_n. Pour voir que cette action est propre, il suffit de vérifier qu'elle est transitive et que le stabilisateur d'un point, disons $iI \in H_n$ est compact dans $Sp_n(\mathbf{R})$. Or les relations (*) montrent que les familles de matrices de $Gl_{2n}(\mathbf{R})$

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{où } B \text{ est symétrique ,}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{où } A \text{ est inversible ,}$$

sont formées de matrices symplectiques. On a respectivement

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot Z = Z + B ,$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \cdot Z = AZ\,{}^tA .$$

Ainsi, si $Z = X + iY \in H_n$ on peut écrire $Z = iY + X = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot iY$ (puisque X est symétrique, la matrice considérée est bien symplectique) puis

$$Z = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot iI .$$

L'orbite de iI est ainsi H_n tout entier. Le stabilisateur de cette matrice $iI \in H_n$ est défini par

$$\begin{aligned} iI &= g \cdot iI = (iA+B)(iC+D)^{-1}, \\ i(iC+D) &= iA + B, \\ C &= -B \text{ et } A = D. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que le stabilisateur de $iI \in H_n$ est formé des matrices symplectiques $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Les relations (*) montrent que ${}^tAA + {}^tBB = I$: La somme des carrés des coefficients (réels) de A et de B vaut ainsi

$$Tr({}^tAA) + Tr({}^tBB) = Tr(I) = n.$$

En particulier, ces coefficients restent bornés dans le sous-groupe K stabilisateur de iI: K est compact. De plus, l'action définie ci-dessus fournit un isomorphisme d'espaces homogènes

$$Sp_n(\mathbf{R})/K \xrightarrow{\sim} H_n.$$

Remarque. Les matrices particulières

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\vee \end{pmatrix} (A \in Gl_n(\mathbf{R})), \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} (B \in M_n(\mathbf{R}), {}^tB = B) \text{ et } J$$

($A^\vee = {}^tA^{-1}$) engendrent le groupe symplectique $Sp_n(\mathbf{R})$. Appelons en effet $G \subset Sp_n(\mathbf{R})$ le sous-groupe engendré par ces matrices et prenons une matrice symplectique $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ arbitraire. Puisque

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P^\vee \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q^\vee \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

on peut choisir convenablement P et Q pour que PAQ soit diagonale avec éléments diagonaux égaux à 0 ou 1. On peut donc supposer que A a déjà cette forme

$$A = \begin{pmatrix} 1_d & 0 \\ 0 & 0_{n-d} \end{pmatrix}.$$

Décomposons similairement C (blocs de même taille que ceux de A)

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme g est symplectique

$$ {}^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & * \end{pmatrix} $$

doit être symétrique: $C_{12} = 0$. Le déterminant de g est non nul, donc les colonnes de g sont linéairement indépendantes. En particulier, les colonnes de

$$ \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \\ \cdot & \cdot \\ * & 0 \\ * & C_{22} \end{pmatrix} $$

doivent être linéairement indépendantes: $\det(C_{22}) \neq 0$. On peut ainsi choisir le nombre réel b de façon que le bloc $A' = A + bC$ de

$$ \begin{pmatrix} I & bI \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + bC & B + bD \\ C & D \end{pmatrix} $$

soit non singulier: ce bloc est le bloc supérieur de

$$ \begin{pmatrix} A + bC \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_d + bC_{11} & 0 \\ bC & bC_{22} \\ \cdots & \cdots \\ C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} $$

et

$$ \begin{aligned} \det(A') &= \det(1_d + bC_{11}) \det(bC_{22}) \\ &= b^{n-d} \det(C_{22}) \det(1_d + bC_{11}) . \end{aligned} $$

On peut donc supposer dès le départ que A est non singulière et la première réduction permet de supposer que $A = I = 1_n$ est l'identité. Multiplions alors g à gauche par

$$ \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} J . $$

On obtient

$$ \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} (C = {}^tAC \text{ doit être symétrique}) . $$

Les conditions symplectiques (*) montrent alors immédiatement que $D' = I$ et B' symétrique de sorte que $g \in Sp_n(\mathbf{R})$ appartient au sous-groupe G engendré par

les matrices particulières. Comme les matrices particulières ont visiblement toutes déterminant unité, celà démontre que $Sp_n(\mathbf{R}) \subset Sl_{2n}(\mathbf{R})$ sans devoir avoir recours au pfaffien. Observons aussi que les transformations de H_n produites par les matrices particulières sont respectivement

$$Z \mapsto AZ^tA,\ Z \mapsto Z + B \text{ et } Z \mapsto -Z^{-1}.$$

S'il est évident a priori que les deux premières familles conservent la positivité de la partie imaginaire Y de Z, ce fait peut être vérifié comme suit pour la dernière transformation. Posons donc

$$Z = X + iY = Y^{\frac{1}{2}}(Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI)Y^{\frac{1}{2}}$$

de sorte que

$$-Z^{-1} = -Y^{-\frac{1}{2}}(Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI)^{-1}\ Y^{-\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit de voir que la partie imaginaire de $-(Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI)^{-1}$ est bien définie positive (la matrice $S + iI = Y^{-\frac{1}{2}}XY^{-\frac{1}{2}} + iI$ est toujours inversible puisque S est symétrique réelle, donc n'a pas la valeur propre $-i$ ...). Mais on vérifie sans peine que

$$(S - iI)(S^2 + I)^{-1} = (S^2 + I)^{-1}(S - iI) \text{ est inverse de } S + iI$$

(comme toutes ces matrices commutent entre elles, on peut être tenté de calculer cet inverse avec les règles usuelles des quotients: c'est légitime). Il ne reste plus alors à vérifier que $(S^2 + I)^{-1} \gg 0$ ce qui est clair!