Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1984)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES
Autor: Steiner, Philippe A. J.
Kapitel: §6. Divisibilité de $Br(C(t_1,\ldots, t_n))$
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53824

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

déterminent le même élément de $\chi(K)$ si et seulement si $m' = m$ et κ' diffère de κ par une puissance m-ième.

On peut aussi faire le lien avec l'homomorphisme a. Soit $\psi \in H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On calcule $a(\psi) \in \chi(K)$ par la méthode de la démonstration du théorème 3.1 (point 4). Si m est l'ordre de ψ, on construit un morphisme algébrique fini $\nu: Y \to X$ qui est un revêtement topologique non ramifié ($\Delta = \emptyset$) à m feuillets. Le corps $L := \mathbf{C}(Y)$ est une extension cyclique de degré m de K et $a(\psi) \in \chi(K)$ provient d'un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ induit par ψ. Si $\kappa \in K$ est tel que $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$, en utilisant cette fois que ν est non ramifié, on peut montrer que $(\kappa) = m \cdot D$ pour un diviseur D dont la classe $[D]$ est d'ordre m.

Remarquons pour terminer que cette construction ne fournit pas une description des classes de diviseurs de torsion (qu'il serait certainement très intéressant d'avoir !).

§ 6. Divisibilité de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$

Auslander et Brumer ont prouvé [1] que si F est un corps de fractions rationnelles à une variable à coefficients dans un corps quelconque, alors soit $\mathrm{Br}(F)$ contient un sous-groupe divisible non trivial, soit $2 \cdot \mathrm{Br}(F) = 0$ (voir aussi [2]). On va montrer que pour tout n, $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ est entièrement divisible.

Pour tout corps de fonctions complexes K, on va établir que le groupe $\chi(K)$ est divisible en appliquant le théorème 4.1 à un modèle particulier X de K: on va choisir une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$ telle que $H_1(X)$ soit libre. (Il serait aussi possible de raisonner directement sur $\chi(K)$ en séparant chaque composante p-primaire.)

Pour démontrer l'existence d'un modèle adéquat de K, on aura besoin de deux propriétés élémentaires de la première classe de Chern

$$c_1 : \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$$

que l'on établit immédiatement.

Lemme 6.1. *Soit X une variété algébrique projective complexe lisse. Alors (i) l'image $c_1(\mathrm{Div}(X))$ de c_1 contient le sous-groupe de torsion $\mathrm{Tors}(H^2(X, \mathbf{Z}))$ et (ii) on a une décomposition $H_2(X) = N \oplus L$, où N est le sous-groupe de $H_2(X)$ annulé par l'évaluation de $c_1(\mathrm{Div}(X))$ et où L est libre.*

Démonstration. On a déjà rappelé (remarque 5.3 (iii)) que la première classe de Chern est définie à partir de la suite exacte $H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O})$ et de l'application $\mathrm{Div}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$ qui est surjective lorsque X est projective.

Ainsi le conoyau de $c_1 : \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ se plonge dans l'espace vectoriel $H^2(X, \mathcal{O})$ et est sans torsion. On en tire immédiatement le point (i), ainsi que l'existence d'un complément direct libre au sous-groupe $c_1(\mathrm{Div}(X))$ de $H^2(X, \mathbf{Z})$. On peut alors déduire la décomposition voulue de $H_2(X)$ au moyen de la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tors}(H_2(X)) \to H_2(X) \to \mathrm{Hom}(H^2(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to 0 .$$
$$\sigma \quad \mapsto [\eta \mapsto <\eta ; \sigma>]$$

□

Pour tout $D \in \mathscr{V}(X)$, notons $\mathscr{L}(D)$ le sous-groupe $\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\Delta$ de $\mathrm{Div}(X)$.

PROPOSITION 6.2. *Soit X une variété algébrique projective complexe lisse et soit $D \in \mathscr{V}(X)$ tel que $c_1(\mathscr{L}(D)) = c_1(\mathrm{Div}(X))$ comme sous-groupes de $H^2(X, \mathbf{Z})$. Alors $H_1(X - D)$ est libre.*

Démonstration. On exprime le rapport entre $H_1(X)$ et $H_1(X - D)$ par la suite exacte d'homologie de $(X, X - D)$:

$$H_2(X) \xrightarrow{j_*} H_2(X, X - D) \xrightarrow{\partial} H_1(X - D) \xrightarrow{k_*} H_1(X) ,$$

où j_* et k_* sont induits par $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, X - D)$ et $k : X - D \hookrightarrow X$, ∂ étant l'homomorphisme bord. On va montrer que $H_2(X, X - D)/j_* H_2(X)$ est sans torsion, puis en déduire que $H_1(X - D)$ est libre.

1) *$H_2(X, X - D)/j_* H_2(X)$ est sans torsion:* On a vu (démonstration du théorème 4.1) que $H_2(X, X - D)$ èst isomorphe au groupe libre $\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$ sur les composantes de D et que l'application j_* devient $\gamma : H_2(X) \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$ dont le dual est donné par la première classe de Chern. Par conséquent, si $\sigma \in H_2(X)$ on a

$$\gamma(\sigma) = \Sigma_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} <c_1(\Delta); \sigma> \eta_\Delta .$$

Soit donc $\tau \in \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$ tel que $m \cdot \tau \in \gamma H_2(X)$, avec m minimal. On doit montrer que $\tau \in \gamma H_2(X)$, c'est-à-dire que $m = 1$. Par hypothèse, il existe $\sigma \in H_2(X)$ tel que $\gamma(\sigma) = m \cdot \tau$ et donc tel que $m \mid <c_1(\Delta), \sigma>$ pour tout $\Delta \in \mathscr{C}(D)$. En décomposant $H_2(X) = N \oplus L$ selon le lemme 6.1, on voit qu'on peut supposer que $\sigma \in L$ puisque l'évaluation de $c_1(\mathrm{Div}(X))$ est nulle sur N.

Il résulte aussi du lemme 6.1 que l'évaluation est un isomorphisme de L sur le dual de $c_1(\mathrm{Div}(X)) = c_1(\mathscr{L}(D))$. Ainsi, $<- ; \sigma>$ est un élément pur

de $\mathrm{Hom}(c_1(\mathscr{L}(D)), \mathbf{Z})$ puisque σ est pur dans L par minimalité de m. Il existe donc $D_\sigma \in \mathscr{L}(D)$ tel que $<c_1(D_\sigma); \sigma> = 1$. Comme $m \mid <c_1(\Delta); \sigma>$ pour tout $\Delta \in \mathscr{C}(D)$, on a aussi $m \mid <c_1(D_\sigma); \sigma> = 1$. Donc $m = 1$ et $H_2(X, X-D)/j_*H_2(X) \simeq \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta/\gamma H_2(X)$ est sans torsion.

2) *$H_1(X-D)$ est libre:* Soit ω un 1-cycle de $X - D$ dont la classe $[\omega] \in H_1(X-D)$ est de torsion, d'ordre m. On va montrer que $m = 1$ et donc que $[\omega] = 0$.

Comme $\mathrm{Ker}\{k_*: H_1(X-D) \to H_1(X)\}$ est sans torsion par le point 1, la restriction de k_* à la torsion $\mathrm{Tors}(H_1(X-D)) \to \mathrm{Tors}(H_1(X))$ est injective. La classe $k_*[\omega] \in H_1(X)$ de ω est donc aussi d'ordre m et il existe une 2-chaîne σ de X dont le bord est $m \cdot \omega$. Notons $[\sigma] \in H_2(X, X-D)$ sa classe. Par construction, $\partial[\sigma] = m \cdot [\omega] = 0$ dans $H_1(X-D)$, d'où $[\sigma] \in j_*H_2(X)$. On va montrer que $m = 1$ en construisant une forme linéaire $\lambda: H_2(X, X-D) \to \mathbf{Z}$ nulle sur $j_*H_2(X)$ et telle que $\lambda[\sigma] \equiv 1 \pmod{m}$.

On choisit une décomposition du groupe des 2-chaînes de X en $\mathbf{Z}\sigma \oplus M$, de sorte que M contienne tous les 2-cycles de X, et on définit un 2-cocycle η valant 1 sur σ et s'annulant sur M. Sa classe $[\eta] \in H^2(X, \mathbf{Z})$ est de torsion (d'ordre m si ω est pur), donc par le lemme 6.1, $[\eta] \in c_1(\mathrm{Div}(X)) = c_1(\mathscr{L}(D))$.

Soit $D_0 \in \mathscr{L}(D)$ tel que $c_1(D_0) = [\eta]$. L'évaluation de la classe $c_1(D_0)$ sur σ n'est pas bien définie dans les entiers, mais seulement dans les entiers modulo m — puisque $\partial\sigma = m \cdot \omega$ — et on a $c_1(D_0)(\sigma) \equiv \eta(\sigma) \equiv 1 \pmod{m}$. On va voir que l'évaluation de $c_1(D_0)$ provient d'une forme sur $H_2(X, X-D)$ qui est la forme λ cherchée.

Soit V un voisinage tubulaire fermé de D dans X, d'intérieur $\mathring{V}$. En utilisant que D, respectivement $X - D$, a le même type d'homotopie que V, respectivement $X - \mathring{V}$, ainsi que la dualité de Poincaré $H^2(V, \partial V) \simeq H_{2n-2}(V)$ donnée par $\frown [V, \partial V]$, on peut déduire une dualité $H^2(X, X-D) \simeq H_{2n-2}(D)$, où n est la dimension complexe de X. Elle est compatible avec la dualité de Poincaré dans X; plus précisément, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2(X, X-D) & \simeq & H_{2n-2}(D) \\ j^* \downarrow & & \downarrow i_* \\ H^2(X) & \simeq & H_{2n-2}(X) \end{array}$$

commute, avec i_* induit par l'inclusion $i: D \hookrightarrow X$. (On le vérifie en utilisant la naturalité du produit cap et le fait que la classe fondamentale $[V, \partial V]$ de V provient de celle de X.) Comme la première classe de Chern est

donnée par la dualité de Poincaré, si $\Delta \in \mathscr{C}(D)$, on a $c_1(\Delta) = (i_*[\Delta])_d$. On voit ainsi que $c_1 : \mathscr{L}(D) \to H^2(X)$ se factorise par $H^2(X, X-D)$. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(D) & \xrightarrow{d_1} & H^2(X, X-D) \\ \downarrow & & \downarrow j^* \\ \mathrm{Div}(X) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X) \end{array}$$

On peut maintenant définir $\lambda : H_2(X, X-D) \to \mathbf{Z}$ comme l'évaluation de $d_1(D_0)$ pour notre $D_0 \in \mathscr{L}(D)$. On a bien que $\lambda[\sigma] \equiv c_1(D_0)(\sigma) \equiv 1 \pmod m$ et que $\lambda \circ j_* = 0$, car c'est l'évaluation de $j^*(d_1(D_0)) = c_1(D_0) = [\eta]$, or η est nul sur les 2-cycles (par construction). Comme $[\sigma] \in j_* H_2(X)$, on en tire que $m = 1$, d'où $\mathrm{Tors}(H_1(X-D)) = 0$, autrement dit $H_1(X-D)$ est libre. □

On peut maintenant établir le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 6.3. *Le groupe* $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ *est divisible pour tout* n.

Démonstration. On fait une récurrence sur n et on montre que tous les sommands directs $\chi(K)$ intervenant dans la décomposition (5) de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ sont divisibles.

Soit donc K un corps de fonctions complexes. On peut trouver une variété algébrique projective lisse $\tilde{X}$ avec $\mathbf{C}(\tilde{X}) = K$ par le théorème de désingularisation de Hironaka et une sous-variété $D \in \mathscr{V}(\tilde{X})$ telle que $c_1(\mathscr{L}(D)) = c_1(\mathrm{Div}(\tilde{X}))$ en utilisant que le groupe $H^2(\tilde{X}, \mathbf{Z})$ est de type fini. Posons $X = \tilde{X} - D$. Le groupe $H_1(X)$ est libre par la proposition 6.2.

On traite le groupe $\chi(K)$ au moyen de la suite exacte du théorème 4.1 appliqué à X

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \xrightarrow{b} \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) . \tag{16}$$

Par le choix de X, le groupe $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible. Il suffit de montrer qu'il en est de même de $\mathrm{Im}b$. Soient $\delta \in \mathrm{Im}b$ et l un entier. Par le lemme 5.2, δ est de la forme $D \otimes 1/m$ avec D un diviseur principal. On a donc $c_1(D) = 0$ et $l \cdot (D \otimes 1/lm) = \delta$ avec $D \otimes 1/lm \in \mathrm{Ker}c = \mathrm{Im}b$. □

On déduit immédiatement de la classification des groupes abéliens divisibles le

COROLLAIRE 6.4. *Quel que soit l'entier* $n \geqslant 2$, *le groupe* $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ *est abstraitement isomorphe à une somme directe de copies de* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *indicées par un ensemble équipotent à* $\mathbf{C}$.

On obtient donc que pour $n \geqslant 2$, les groupes $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ sont tous isomorphes entre eux, ce qui est analogue au phénomène observé par Fein et Schacher [7] dans le cas des corps de fractions rationnelles à coefficients dans des corps globaux.

La proposition 6.2 permet aussi d'exprimer $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ en une seule formule, peut-être plus agréable, mais « moins canonique » que le reste de notre calcul. Introduisons pour cela les notations $\mathrm{Div}_0(X)$ pour le groupe des diviseurs de X dont la première classe de Chern est nulle et $\mathscr{P}_n$ pour l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_i))$ des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans un corps $\mathbf{C}(t_1, ..., t_i)$ pour $1 \leqslant i < n$.

THÉORÈME 6.5.

(i) *Pour tout* $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_i))$, *il existe une variété algébrique* X_f *lisse avec* $H_1(X_f)$ *libre et* $\mathbf{C}(X_f)$ *isomorphe à l'extension de* $\mathbf{C}(t_1, ..., t_i)$ *obtenue en adjoignant une racine de* f.

(ii) *On a un isomorphisme*
$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)) \simeq \oplus_{f \in \mathscr{P}_n} \{H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \mathrm{Div}_0(X_f) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}$.

Démonstration. Pour tout $f \in \mathscr{P}_n$, on trouve X_f de même manière que X dans la démonstration du théorème 6.3. Comme $H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible, la suite exacte (16) est scindée (mais pas de manière canonique!), ce qui donne l'isomorphisme annoncé. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER, M. and A. BRUMER. Brauer groups of discrete valuation rings. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 71* (1968); *Indag. Math. 30 (3)* (1968), 286-296.

[2] BRUMER, A. and M. ROSEN. On the size of the Brauer group. *Proc. Amer. Math. Soc. 19 (3)* (1968), 707-711.

[3] CHERN, S. S. *Complex manifolds without potential theory.* 2e éd., Springer (1979) (Universitext.)

[4] COHEN, M. M. *A course in simple homotopy theory.* Springer (1973) (Graduate texts in mathematics No. 10.)

[5] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology.* Springer (1972) (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 200.)