Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

Autor: Danset, Renaud

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE
ET
PRINCIPE DE HASSE FIN
POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

par Renaud DANSET

INTRODUCTION

A) PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Soit, pour tout ce travail, $f = (f_1, ..., f_r)$ un ensemble de r formes, de degré $d \geqslant 2$, en n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ et à coefficients entiers. On prendra toujours $r \leqslant n$. (N.B. : « forme » signifie « polynôme homogène »).

Une conjecture attribuée à Artin dit que, si d est impair et $n > rd^2$, le système diophantien $f = 0$ admet des solutions entières non triviales (on dit que f représente zéro). Cette conjecture tente de préciser l'idée selon laquelle si d est impair, ou pair mais avec des conditions nécessaires évidentes et s'il y a suffisamment de variables, alors le système f représente zéro.

Birch (1957, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* 4, 102-105) montre, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto N(d)$ telle que toute forme de degré impair d, en n variables avec $n \geqslant N(d)$ représente zéro; mais sa méthode conduit à des valeurs $N(d)$ astronomiques.

En fait cette conjecture est tellement inaccessible que, dans le cas le plus simple, $d = 3$ et $r = 1$, Davenport (cf. bibliographie) a démontré, à la suite d'un énorme et remarquable travail, que toute forme cubique à coefficients entiers ayant au moins 16 variables, représente zéro. Non seulement 16 n'est pas 10, mais rien d'aussi précis n'est connu pour les autres couples (d, r).

Une forme plus faible de la conjecture d'Artin est la suivante: pour tout $d \geqslant 2$, si $n > rd^2$, le système $f = 0$ admet des solutions non triviales dans $\mathbf{Q}_P$ (on dit que f représente zéro dans $\mathbf{Q}_P$) pour tout entier premier p. Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Hasse (cf. par exemple Borevitch-Chafarevitch, chapitre I, théorème 5). Le cas $d = 3$, $r = 1$ a été

démontré simultanément mais de manières différentes par Demyanov (1950, On cubic forms in discretely normed fields, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 74*, 889-891) par Lewis (Cubic homogeneous polynomials over p-adic number-fields, *Annals Math. 56*, 1952, 473-478) et Davenport (Cubic forms in 32 variables, cf. bibliographie). Le cas $d = 2$, $r = 2$ a été démontré par Demyanov, une démonstration simplifiée se trouvant dans Birch, Lewis, Murphy, Simultaneous quadratic forms, *Amer. J. Math. 84, n° 1*, 1962, 110-115.

Cette seconde conjecture n'a, elle aussi, été démontrée pour aucun autre couple (d, r). Cependant Brauer (1945, A note on systems of homogeneous algebraic equations, *Bull. Amer. Math. Soc. 51*, 749-755) a montré, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto M(d)$ telle que toute forme de degré d ayant au moins $M(d)$ variables représente zéro dans $\mathbf{Q}_p$ pour tout p. Dans son travail cité ci-dessus, Birch a utilisé ce résultat de Brauer, malheureusement la méthode, on l'a déjà dit, ne donne pas des valeurs $M(d)$ raisonnables.

On peut citer aussi Ax et Kochen (1965, Diophantine problems over local fields, I, II, *Amer. J. Math. 87*, 605-645) qui ont prouvé que pour un degré d donné, la seconde conjecture est vraie pour toutes les valeurs de p sauf peut-être pour un nombre fini, dépendant de d et dans le cas $r = 1$. Lang a aussi démontré que si la conjecture était vraie pour $r = 1$, elle était également vraie pour tout $r > 1$. (On quasi algebraic closure, *Ann. Math. 55, n° 2*, 1952, 373-390). Enfin Terjanian (*C.R. Acad. Sci., 262*, 1966, A612) a construit un polynôme homogène de degré 4 à 18 variables qui ne représente pas 0 dans $\mathbf{Q}_2$ ce qui constitue un contre-exemple à la conjecture, mais d'un type particulier...! Notons pour terminer qu'il est facile de montrer que la valeur hypothétique $r\,d^2$ est une borne inférieure (cf. Borevitch-Shafarevitch, Ch. I, § 6-5).

Le lien entre les deux conjectures précédemment citées est ce qu'on appelle le Principe de Hasse; si le système $f = 0$ représente zéro dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$ alors il représente zéro dans $\mathbf{Q}$. Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Minkowsky-Hasse (cf. Borevitch-Shafarevitch, ch. I, § 7), associé au théorème de Hasse mentionné ci-dessus, il devient le théorème de Meyer: *toute forme quadratique à coefficients entiers, indéfinie et ayant au moins cinq variables, représente zéro.* Malheureusement Selmer (The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, *Acta Math. 85, n° 3-4*, 1951, 203-362) a montré en particulier que la forme cubique $3x^3 + 4y^3 + 5z^3$ représente zéro dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$ mais pas dans $\mathbf{Q}$. Enfin il existe beaucoup d'autres contre-exemples qui infirment le Principe de Hasse lorsque $d \geqslant 3$.

Que peut-on faire avec deux conjectures inaccessibles et un Principe faux ?... Restreindre considérablement ses ambitions !

Il existe plusieurs façons d'affaiblir le Principe de Hasse (cf. M. de La Palice); celle qui est utilisée dans ce travail se définit comme suit et s'appelle

PRINCIPE DE HASSE FIN : Si le système diophantien $f = 0$ possède une solution *non singulière* (N.B. : cette dernière est forcément non triviale !) dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_P$, alors le système f représente zéro dans $\mathbf{Q}$.

Cette nouvelle version ne résiste pas mieux au contre-exemple de Selmer mais l'expérience a montré sa validité pour des classes suffisamment importantes de systèmes f et en particulier pour ceux considérés dans ce travail.

Pour obtenir ses résultats sur les formes cubiques, évoqués ci-dessus (cf. également le paragraphe 5D du présent travail) Davenport utilise la méthode dite « du cercle » de Hardy et Littlewood. Birch (Forms in many variables, 1962, cf. bibliographie et § 5B du présent travail) s'inspire des résultats de Davenport en les généralisant considérablement. Enfin, W. M. Schmidt, vers 1980, reprend la méthode du cercle comme l'avait fait Birch mais pour le cas $d = 2$, $r > 1$.

Puisque la méthode du cercle étudie un certain type de sommes trigonométriques associées au système f, *il a paru intéressant d'exprimer la propriété précise de ces sommes* qui permet le succès du principe de Hasse fin pour les systèmes f concernés.

Cette propriété (constituée par les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous formulées) n'est pas de tout repos. Trouver une qualité du système f qui entraîne cette propriété des sommes trigonométriques associées et donc l'application du Principe de Hasse fin, est un problème difficile que chaque auteur traite à sa façon, qui ne constitue pas l'objet du présent travail mais qui est résumé au paragraphe 5. Notons d'ailleurs que les dites « qualités », même si leurs auteurs parviennent à leur donner une expression concise, sont difficilement compréhensibles d'un titulaire du baccalauréat et que leur vérification dans des cas généraux, c'est-à-dire exception faite des exercices « faits pour », n'est pas évidente.

Puisque la méthode du cercle établit une formule asymptotique, réduite en fait à sa partie principale dont le coefficient est le produit de facteurs représentant toutes les places de $\mathbf{Q}$, *il a paru intéressant de donner un exposé adélique de cette méthode*, suivant ainsi une tendance générale de ces dernières années et plus particulièrement Lachaud (1982 « une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring » cf. bibliographie).

On obtient ainsi:

1°) Une présentation unifiée des arcs majeurs.

2°) Une expression globale pour la série singulière et l'intégrale singulière qui met en évidence la transformée de Gauss globale F^* (selon la notation d'Igusa, cf. bibliographie) associée à une fonction de Schwarz-Bruhat d'un type précis.

Remarque. Un résultat analogue pour d'autres fonctions de Schwarz-Bruhat est une des espérances que ce travail peut susciter.

3°) L'exposé d'une méthode suffisamment générale comme le montrent les exemples du paragraphe 5 et dont les hypothèses initiales sont nettement dégagées.

4°) La démonstration au lemme 1-6 d'une majoration générale d'une somme de modules d'intégrales oscillantes.

B) Notations et Hypothèses principales

Soient $f = (f_1, ..., f_r)$ r formes de degré $d \geqslant 2$, en n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $r \leqslant n$ et à coefficients entiers.

Soit g un polynôme quelconque de degré $< d$ et à coefficients entiers, en les variables x.

Remarque. Tout ce travail pourrait se faire sans mentionner un tel polynôme g, sur ce point on pourra lire la remarque finale du paragraphe 1 et le paragraphe 5A.

Soit $\mathscr{B}$ une boîte de dimension n (parallélépipède de côtés parallèles aux axes de $\mathbf{R}^n$ ou encore: $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leqslant i \leqslant n, a_i \leqslant x \leqslant b_i\}$) et de côtés au plus égaux à 1 (i.e.: $1 \leqslant i \leqslant n, b_i - a_i < 1$).

Soit $P \in \mathbf{R}_+$ et destiné à être très grand.

Soit $\varepsilon > 0$ et destiné à être très petit.

Soit $\nu \in \mathbf{Z}^r$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ ou encore: $1 \leqslant i \leqslant r, 0 \leqslant \alpha_i < 1$.

Soit la somme trigonométrique

$$S(\alpha) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j f_j(x) + g(x)\right)\right]$$

On définit les hypothèses suivantes concernant les sommes trigonométriques $S(\alpha)$ et donc le système f:

(H1) Il existe une constante $\Omega > 0$ telle que pour tout $\Delta > 0$, pour tout polynôme g de degré $< d$, pour toute boîte $\mathscr{B}$ incluse dans un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, pour tout $P > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, on ait *l'alternative suivante*:

ou bien i) $|S(\alpha)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}$

la constante impliquée dans le symbole « $\ll$ » dépendant seulement des coefficients des formes f_i, du domaine borné dans lequel la boîte $\mathscr{B}$ est choisie, de $\varepsilon > 0$ et, à cause de cette constante, l'inégalité étant triviale pour P petit;

ou bien ii) Il existe des approximations rationnelles $\dfrac{a}{q} = \left(\dfrac{a_1}{q}, ..., \dfrac{a_r}{q}\right)$ de $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ telles que

$$pgcd(a_1, ..., a_r, q) = 1 \text{ (on ne considère que les } a_i \neq 0),$$
$$1 \leqslant q \leqslant P^{\Delta},$$
$$0 \leqslant a_i < q,$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r)\ |q\,\alpha_i - a_i| \leqslant P^{-d+\Delta}.$$

(H2) Ω étant la constante définie dans l'hypothèse (H1), on a

$$\Omega > r + 1.$$

Remarques.

a) Comme annoncé précédemment, l'hypothèse (H1) peut faire frémir. En plus romancé, elle énonce une propriété fréquemment rencontrée ou désirée chez les sommes trigonométriques: ou bien on dispose d'une bonne majoration du module des sommes trigonométriques étudiées (ici les sommes $S(\alpha)$), ou bien le coefficient principal de l'exposant (ici la variable α) possède de bonnes approximations rationnelles.

b) On peut remarquer qu'en raison du théorème classique d'approximation rationnelle simultanée de r nombres réels (cf. Hardy and Wright, 4e édition, paragraphe 11.12) le cas ii), et donc l'hypothèse (H1), sont triviaux pour $\Delta \geqslant \dfrac{r}{r+1} d$.

c) On a préféré distinguer les hypothèses (H1) et (H2) car elles jouent des rôles très distincts dans les démonstrations de ce travail.

d) Pour une justification de ces hypothèses, on doit voir le paragraphe 5A.

e) L'ensemble des $\alpha \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$, qui satisfont aux conditions de bonne approximation rationnelle énoncées dans ii), constitue ce qu'on appelle classiquement les *arcs majeurs*. L'origine de ce nom se comprend en observant le cas $r = 1$.

L'ensemble complémentaire du précédent dans $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ constitue les *arcs mineurs*. Dans la plupart des applications de la méthode du cercle, dont le nom se comprend soudain mieux (prendre encore le cas $r = 1$ et se demander ce qu'est $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$), le traitement de ces arcs mineurs est la partie la plus délicate car il s'agit d'obtenir, sur eux, une « bonne » majoration du module des sommes trigonométriques étudiées.

On comprend donc que l'hypothèse (H1) avec le cas i) escamote complètement cette difficulté qui, bien entendu, réapparaît selon un Principe de conservation bien connu, dans le problème, déjà évoqué, consistant à trouver une propriété du système f qui entraîne l'hypothèse (H1) (et aussi (H2) d'ailleurs!). Pour cet aspect qui, cela a déjà été dit, sort du cadre de ce travail mais lui est immédiatement associé, il faut lire le paragraphe 5.

Si le lecteur a eu la patience de lire ce qui précède, il sait que le but de ce travail est de montrer que les systèmes f, dont les sommes trigonométriques $\mathscr{S}(\alpha)$ associées répondent aux hypothèses (H1) et (H2), observent le principe de Hasse fin.

Cependant, comme la méthode du cercle se prête très bien à l'étude du système diophantien $f = \nu$ (et pas seulement $f = 0$) qui paraît même mieux adapté à la nature profonde de celle là, il vaut mieux énoncer deux nouvelles hypothèses pour le cas général dont la restriction au cas $\nu = 0$ rappellera irrésistiblement les conditions du Principe de Hasse fin.

(H3) Pour un élément ν de $\mathbf{Z}^r$, le système $f = \nu$ admet une solution *non singulière* dans $\mathbf{Z}_p^n$, pour tout entier premier p.

(H4) Le système $f = 0$ admet une solution non singulière dans $\mathbf{R}^n$.

Remarque. Si $\nu \neq 0$ l'hypothèse (H4) ne dit pas que la variété réelle

$$V(\nu) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = \nu\}$$

admet un point réel non singulier mais qu'elle admet un point *à l'infini* réel non singulier; pour une justification de cette « anomalie », voir le paragraphe 5C.

Le lecteur sait également que la présentation adoptée dans ce travail utilise les adèles. Il est temps d'en parler.

C) ADÈLES

Pour toutes les relations, définitions et propriétés des adèles utilisées ci-après, une référence est Godement (Adèles et idèles, cf. bibliographie).

Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des adèles sur $\mathbf{Q}$.

Soit ψ le caractère de Tate.

Soit φ une fonction de Schwarz-Bruhat sur $\mathbf{A}^n$, telle que

1) φ est décomposable (i.e.: $\varphi(x) = \varphi_\infty(x_\infty) \prod_p \varphi_p(x_p)$)

2) Pour tout p premier, on a

$$\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$$

(on note 1_E la fonction caractéristique d'un ensemble E),

3) $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$ (produit de convolution)

avec θ fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$, à support compact inclus dans un voisinage de 0 et, en pratique, aussi petit qu'il sera nécessaire mais fixé et donc indépendant de la variable P.

Remarque. Il s'agit là d'une différence notable avec le travail de Birch (« forms in many variables » cf. bibliographie) qui utilise la fonction $1_{P\mathscr{B}}$, caractéristique de la boîte $P\mathscr{B}$, discontinue au bord de celle-ci. En définissant φ_∞ comme ci-dessus on obtient d'abord une fonction de Schwarz-Bruhat ce qui permet l'usage d'une formule de Poisson au paragraphe 1. En revanche, on complique légèrement le paragraphe 3 (cf. la remarque importante qui suit la démonstration du Lemme 3-2).

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$, on définit la somme

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)$$

avec $<\xi, f(x)> = \sum_{i=1}^{r} \xi_i f_i(x)$.

Cette somme $H(\xi)$ est absolument convergente et constante sur les classes modulo $\mathbf{Q}^r$, essentiellement parce que le caractère de Tate est trivial sur $\mathbf{Q}$.

Ainsi, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}^r$, l'application $\xi \mapsto H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)$ définit une fonction sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et on a l'égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x) \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} \psi(<\xi, f(x)-\nu>)d\xi .$$

Si $f(x) \neq \nu$, le caractère $\xi \mapsto \psi(<\xi, f(x)-\nu>)$ n'est pas trivial sur le groupe $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et son intégrale est nulle.

Si $f(x) = \nu$, ce caractère est trivial et comme $\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} d\xi = 1$, puisque les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ sont choisies pour qu'il en soit ainsi! On obtient l'importante égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n \\ f(x)=\nu}} \varphi_\infty(x)$$

(la somme $\sum$ du second membre ne porte que sur les $x \in \mathbf{Z}^n$ car $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$ pour tout p, de plus cette somme représente à peu près le nombre de solutions entières du système $f = \nu$, présentes dans la boîte $P\mathscr{B} \subset \mathbf{R}^n$).

On cherche principalement, dans le présent travail, à comparer la somme $H(\xi)$ avec l'intégrale de même forme, appelée transformée de Gauss globale (en fait associée au système f, au caractère ψ et à la fonction φ)

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)dx\,.$$

On veut obtenir la formule asymptotique suivante: il existe $\delta > 0$, tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \int_{\mathbf{A}^r} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi + O(P^{n-rd-\delta})$$

Remarque. L'intégrale portant sur F^* est la seule raisonnable car cette fonction n'est pas en général constante sur les classes modulo $\mathbf{Q}$. De plus cette intégrale n'est autre, selon les notations d'Igusa (cf. bibliographie) que $\widehat{F^*}(-\nu) = F(\nu)$ appelée série singulière globale (cf. le paragraphe 5F). Le chapeau $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier associée au caractère de Tate (cf. Godement...).

D) Méthode du cercle adélique

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$; on utilisera désormais les notations suivantes

$$|\xi_\infty| = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq r} |\xi_{i,\infty}| \quad \text{et, pour tout } p, \quad |\xi_p|_p = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq r} |\xi_{i,p}|_p;$$

on définit aussi la fonction

$$Q(\xi) = \prod_p \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p)$$

qui jouera un rôle important et dont on peut remarquer qu'elle ne dépend que des places finies p de ξ mais pas de ξ_∞.

Enfin on définit, pour chaque $\Delta > 0$, *un arc majeur* (noter l'emploi du singulier)

$$M(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r / |\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta\}.$$

Remarque.

a) Pour Δ suffisamment petit (ceci sera précisé en temps voulu) l'application canonique $\mathbf{A}^r \to (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$, que nous désignerons désormais par la lettre π, est *injective* sur $M(\Delta)$. Dans ces conditions, on notera de la même façon $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$ en remarquant que les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ attribuent respectivement la même valeur aux ensembles $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$.

b) Ainsi le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la méthode classique a pour analogue adélique le quotient *compact* $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et les nombreux arcs majeurs classiques associés à un même $\Delta > 0$, trouvent leur analogue adélique dans un unique ensemble $M(\Delta)$ (ou $\pi(M(\Delta))$ si on préfère). Cette présentation de l'arc majeur adélique est due à Lachaud (cf. bibliographie).

Au paragraphe 1, au moyen d'une formule de Poisson, on compare, pour $\xi \in M(\Delta)$, la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 1. *Pour* Δ *suffisamment petit, il existe* $\delta_1 > 0$ *tel que*

$$\int_{M(\Delta)} (H(\xi) - F^*(\xi))\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_1}).$$

Au paragraphe 2, on majore la somme $H(\xi)$ sur l'arc mineur adélique $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))$, obtenant le

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2) *et pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Au paragraphe 3, on majore l'intégrale $F^*(\xi)$ sur $\mathbf{A}^r - M(\Delta)$ pour démontrer le

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *il existe* $\delta_3 > 0$ *tel que*

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Remarque. Une conséquence du théorème 3 est que $F^* \in L^1(\mathbf{A}^r)$.

Ces trois théorèmes permettent d'obtenir la formule asymptotique désirée.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = \nu}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-\nu) + O(P^{n-rd-\delta}).$$

Au paragraphe 4, on utilise les hypothèses (H3) et (H4) pour rendre effective la formule asymptotique précédente. On démontre ainsi le

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, on a*

$$\widehat{F^*}(-\nu) \gg P^{n-rd}.$$

Il résulte de tout ceci le

THÉORÈME PRINCIPAL. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4) *le système diophantien* $f = \nu$ *admet une infinité de solutions entières.*

Un corollaire évident de ce Théorème Principal, pour $\nu = 0$, énonce qu'*un système* f *répondant aux hypothèses* (H1) *et* (H2) *observe le Principe de Hasse fin.*

Enfin le paragraphe 5, on l'a déjà compris, est consacré à des explications complémentaires et à des exemples suivant les travaux de Birch, Davenport et W. M. Schmidt; mais on ne trouvera dans ce paragraphe aucune démonstration à l'opposé des paragraphes 1 à 4 où on s'est efforcé d'être le plus complet possible.

§ 1. ARC MAJEUR

Le but de ce paragraphe est une bonne majoration de la différence entre la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$ lorsque ξ appartient à un arc majeur $M(\Delta)$.