Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1985)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ DE VERDIER
Autor: Grivel, Pierre-Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54567

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 227-247

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ DE VERDIER

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit R un anneau commutatif unitaire. Désignons par $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie $K(X)$ des complexes de faisceaux de R-modules sur un espace topologique X.

Si $f: X \to Y$ est une application continue entre espaces localement compacts, on peut définir des foncteurs $\mathbf{R}f_!: D(X) \to D(Y)$ et $f^!: D(Y) \to D(X)$, qui généralisent les foncteurs image directe et image inverse. On a alors le résultat suivant qui a été annoncé par Verdier dans [V].

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Si le foncteur $f_!$ est de dimension cohomologique finie et si l'anneau R est noethérien, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om^{\cdot}(\mathbf{R}f_!(\mathscr{A}^{\cdot}); \mathscr{B}^{\cdot}) = \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathscr{H}om^{\cdot}(\mathscr{A}^{\cdot}; f^!(\mathscr{B}^{\cdot}))$$

dans $D^+(Y)$, où $\mathscr{A}^{\cdot} \in \mathrm{Ob}D^-(X)$ et $\mathscr{B}^{\cdot} \in \mathrm{Ob}D^b(Y)$.

Ce théorème, qui à l'origine a joué un rôle en géométrie algébrique, trouve aujourd'hui son utilisation dans l'homologie d'intersection et la théorie des $\mathscr{D}$-modules.

Cette note est la suite obligée de [Gr]. Elle développe les détails de la démonstration du théorème de dualité en suivant un argument qui était déjà esquissé dans [V]. Je remercie N. Spaltenstein qui m'a suggéré la possibilité de définir directement et explicitement l'isomorphisme entre les deux foncteurs et à qui je dois également l'idée du lemme fondamental 3.4.

On reprend ici les notations introduites dans [Gr], à une exception près cependant. L'anneau de base est noté R (au lieu de A) et le faisceau constant sur X de fibre R est noté R_X (au lieu de $\mathbf{A}$).

1. Les foncteurs $f_!^{\mathscr{K}}$ et $f_{\mathscr{K}}^!$

1.1. Un faisceau $\mathscr{P} \in \mathrm{Ob}Sh(X)$ est R-plat si le foncteur $-\underset{R}{\otimes}\mathscr{P}$ est exact. (S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base R on dira simplement que $\mathscr{P}$ est plat et on écrira $-\otimes\mathscr{P}$).

Un faisceau $\mathscr{P}$ est plat si et seulement si, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathscr{P}_x$ est un R-module plat. De plus $\mathscr{P}$ est plat si et seulement si $\mathscr{P}_U$ est plat pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$.

1.2. Proposition. *La catégorie $Sh(X)$ admet suffisamment d'objets plats.*

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Ob}Sh(X)$ il existe un épimorphisme $\mathscr{P} \to \mathscr{F} \to 0$ où $\mathscr{P}$ est un faisceau plat.

Notons W l'ensemble des couples $(U; s)$ où $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $s \in \mathscr{F}(U)$. Un tel couple détermine un morphisme $\tilde{s}: R_U \to \mathscr{F}$ de faisceaux sur X ([Go], chap. II, remarque 2.9.1). Ces morphismes induisent un morphisme $\underset{W}{\oplus} R_U \to \mathscr{F}$ qui par construction même est surjectif. Or le faisceau R_U est plat; donc d'après 1.1., ([Go], chap. II, 2.7) et [Bo2], chap. I, § 2, prop. 2), le faisceau $\underset{W}{\oplus} R_U$ est plat.

1.3. Corollaire. *Tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X admet une résolution plate $\mathscr{P}_\cdot \to \mathscr{F} \to 0$.*

1.4. Soit X et Y deux espaces localement compacts. Considérons une application continue $f: X \to Y$ telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie.

Proposition. *Soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X, $f_!$-mou et plat. Alors pour tout faisceau $\mathscr{A}$ sur X, le faisceau $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est $f_!$-mou.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.3 on peut trouver une résolution $\mathscr{P}_\cdot \to \mathscr{A} \to 0$ de $\mathscr{A}$ par des faisceaux de la forme $\mathscr{P}_j = \underset{W_j}{\oplus} R_U (j \geqslant 0)$. Comme $\mathscr{K}$ est plat la suite $\mathscr{P}_\cdot \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to 0$ est une résolution de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n et posons $\mathscr{B} = \mathrm{Ker}(d_n \otimes 1_{\mathscr{K}})$. Alors la suite

$$0 \to \mathscr{B} \to \mathscr{P}_n \otimes \mathscr{K} \to \ldots \to \mathscr{P}_0 \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to 0$$

est une résolution bornée du faisceau $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{K}$ est $f_!$-mou, les faisceaux

$\mathscr{P}_j \otimes \mathscr{K} = \bigoplus_{W_j} R_U \otimes \mathscr{K} = \bigoplus_{W_j} \mathscr{K}_U (0 \leqslant j \leqslant n)$ sont $f_!$-mous ([Gr], lemme 2.10). L'argument standard utilisé dans ([Gr], th. 2.12) montre que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est $f_!$-mou.

1.5. THÉORÈME. *Supposons que l'anneau R est noethérien. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau plat sur X. Alors $\mathscr{F}$ admet une $f_!$-résolution $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{K}^\cdot$, dans laquelle les faisceaux $\mathscr{K}^j$ sont plats $(j \geqslant 0)$.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^\cdot$ la résolution flasque canonique de $\mathscr{F}$ ([Go], chap. II, 4.3) et posons $\mathscr{Z}^j = \operatorname{Coker}(d : \mathscr{C}^{j-1} \to \mathscr{C}^j)$ $(j \geqslant 1)$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n. Alors la suite exacte

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \ldots \to \mathscr{C}^n \to \mathscr{Z}^{n+1} \to 0$$

est une $f_!$-résolution de $\mathscr{F}$. En effet les faisceaux $\mathscr{C}^j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ étant flasques, ils sont $f_!$-mous ([Br], chap. II, coroll. 2.5 et [Gr], lemme 2.10) et par un argument standard ([Gr], th. 2.12) le faisceau $\mathscr{Z}^{n+1}$ est aussi $f_!$-mou.

Il reste donc à montrer que les faisceaux $\mathscr{C}^j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ et $\mathscr{Z}^{n+1}$ sont plats.

La construction de la résolution flasque étant inductive, il suffit de démontrer par récurrence que, pour tout entier $j \geqslant 0$, les faisceaux $\mathscr{C}^j$ et $\mathscr{Z}^{j+1}$ sont plats.

Pour tout $U \in \operatorname{Ouv}(X)$ on a $\mathscr{C}^0(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$. Par hypothèse les modules $\mathscr{F}_x$ sont plats sur l'anneau noethérien R, donc $\mathscr{C}^0(U)$ est un module plat (voir Appendice A). Il en résulte que pour tout $x \in X$ le module $\mathscr{C}^0_x = \varinjlim_{U \in \mathscr{V}_x} \mathscr{C}^0(U)$ est plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) et par suite $\mathscr{C}^0$ est un faisceau plat.

De plus considérons la suite exacte scindée ([Br], chap. II, § 2)

$$0 \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{C}^0_x \to \mathscr{Z}^1_x \to 0$$

dans laquelle les deux premiers termes sont des modules plats. Alors le module $\mathscr{Z}^1_x$ est aussi plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) donc le faisceau $\mathscr{Z}^1$ est plat.

Maintenant supposons que les faisceaux $\mathscr{C}^q$ et $\mathscr{Z}^{q+1}$ sont plats pour $0 \leqslant q \leqslant p-1$ avec $p \geqslant 1$. On a $\mathscr{C}^p(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{Z}^p_x$. Par hypothèse de récurrence les modules $\mathscr{Z}^p_x$ sont plats, donc le même argument que précédemment montre que le faisceau $\mathscr{C}^p$ est plat et en considérant la suite exacte scindée

$$0 \to \mathscr{Z}^p_x \to \mathscr{C}^p_x \to \mathscr{Z}^{p+1}_x \to 0$$

on en déduit que le faisceau $\mathscr{Z}^{p+1}$ est plat.

1.6. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts, telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie et soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X qui soit $f_!$-mou et plat. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \xrightarrow{-\otimes\mathscr{K}} Sh(X) \xrightarrow{f_!} Sh(Y)$$

définit un foncteur $f_!^{\mathscr{K}}: Sh(X) \to Sh(Y)$ qui commute aux sommes directes puisque chacun des foncteurs qui le compose commute aux sommes directes ([Gr], th. 2.15).

1.7. PROPOSITION. *Le foncteur* $f_!^{\mathscr{K}}$ *est exact.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X. Comme $\mathscr{K}$ est plat la suite

$$0 \to \mathscr{A}' \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A}'' \otimes \mathscr{K} \to 0$$

est exacte et formée de faisceaux $f_!$-mous en vertu de la proposition 1.4. Il résulte alors des propriétés du foncteur $R^i f_!$ que la suite

$$0 \to f_!(\mathscr{A}' \otimes \mathscr{K}) \to f_!(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}) \to f_!(\mathscr{A}'' \otimes \mathscr{K}) \to 0$$

est exacte.

1.8. Rappelons que le foncteur

$$f_{\mathscr{K}}^!: Sh(Y) \to Sh(X)$$

est défini de la façon suivante ([Gr], § 3): pour tout faisceau $\mathscr{B}$ sur Y et pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ on pose

$$f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})(U) = \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}).$$

Il est évident que le foncteur $f_{\mathscr{K}}^!$ est exact gauche et qu'il commute aux produits directs.

2. Les foncteurs E et F

2.1. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie. Soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X, $f_!$-mou et plat.

2.2. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \times Sh(Y) \overset{f_!^{\mathscr{K}} \times 1_{Sh(Y)}}{\to} Sh(Y) \times Sh(Y) \overset{\mathscr{H}om}{\to} Sh(Y)$$

définit un bifoncteur

$$E(-\,;-): Sh(X)^0 \times Sh(Y) \to Sh(Y)$$

2.3. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau sur X et $\mathscr{B}$ un faisceau sur Y. Le foncteur $E(\mathscr{A}\,;-): Sh(Y) \to Sh(Y)$ est exact gauche et commute aux produits directs. Le foncteur $E(-\,;\mathscr{B}): Sh(X)^0 \to Sh(Y)$ est exact gauche et transforme les sommes directes en produits directs.

En effet cela résulte des propriétés analogues du foncteur $\mathscr{H}om$, de la proposition 1.7 et de ([Gr], th. 2.15).

2.4. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \times Sh(Y) \overset{1_{Sh(X)} \times f^!_{\mathscr{K}}}{\to} Sh(X) \times Sh(X) \overset{\mathscr{H}om}{\to} Sh(X) \overset{f_*}{\to} Sh(Y)$$

définit un bifoncteur

$$F(-\,;-): Sh(X)^0 \times Sh(Y) \to Sh(Y)$$

2.5. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau sur X et $\mathscr{B}$ un faisceau sur Y. Le foncteur $F(\mathscr{A}\,;-): Sh(Y) \to Sh(Y)$ est exact gauche et commute aux produits directs.

Le foncteur $F(-\,;\mathscr{B}): Sh(X)^0 \to Sh(Y)$ est exact gauche et transforme les sommes directes en produits directs. En effet cela résulte des propriétés analogues des foncteurs $\mathscr{H}om$ et f_* et du N° 1.8.

2.6. Théorème. *Il existe un isomorphisme de bifoncteurs*

$$\lambda: E(-\,;-) \to F(-\,;-)\,.$$

2.7. La construction du morphisme λ et la démonstration du théorème fera l'objet du paragraphe 3.

2.8. COROLLAIRE. *Le foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$ *est adjoint à droite au foncteur* $f^{\mathscr{K}}_! : Sh(X) \to Sh(Y)$.

Démonstration. En effet prenons les sections globales dans l'isomorphisme du théorème 2.6. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}\big(f^{\mathscr{K}}_!(\mathscr{A}) ; \mathscr{B}\big) = \mathrm{Hom}_{Sh(X)}\big(\mathscr{A} ; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})\big)$$

2.9. COROLLAIRE. *Le foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : Sh(Y) \to Sh(X)$ *se restreint à un foncteur* $f^!_{\mathscr{K}} : \mathrm{Inj}(Y) \to \mathrm{Inj}(X)$.

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X et soit $\mathscr{J}$ un faisceau injectif sur Y. En appliquant successivement à cette suite les foncteurs exacts $f^{\mathscr{K}}_!$ et $\mathrm{Hom}_{Sh(Y)}(- ; \mathscr{J})$, puis en utilisant l'isomorphisme du corollaire 2.8, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}\big(\mathscr{A}'' ; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})\big) \to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}\big(\mathscr{A} ; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})\big) \to \mathrm{Hom}_{Sh(X)}\big(\mathscr{A}' ; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})\big) \to 0 .$$

Il en résulte que le faisceau $f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{J})$ est injectif.

3. L'ISOMORPHISME λ

3.1. On reprend les hypothèses du N° 2.1. Le résultat suivant permet de simplifier la construction de λ en passant d'une situation locale à une situation globale.

LEMME. *Soit* $W \in \mathrm{Ouv}(Y)$: *posons* $W' = f^{-1}(W)$ *et considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{j'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W & \xrightarrow[j]{} & Y \end{array}$$

où j *et* j' *sont des inclusions et* f' *est la restriction de* f *à* W'. *Alors* $f'_!$ *est de dimension cohomologique finie et si* $\mathscr{K}$ *est un faisceau sur* X $f_!$*-mou et plat alors* $j'^*\mathscr{K}$ *est* $f'_!$*-mou et plat.*

De plus si $\mathscr{A} \in Sh(X)$ *et* $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ *on a des isomorphismes canoniques*

$$j^* f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}) = f_!'^{j'^*\mathscr{K}}(j'^*\mathscr{A}), \tag{3.1.1}$$

$$j'^* f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}) = f'^!_{j'^*\mathscr{K}}(j^*\mathscr{B}). \tag{3.1.2}$$

Démonstration. Il est évident que $f'_!$ est de dimension cohomologique finie. Pour tout $x \in W'$ on a $(j'^*\mathscr{K})_x = \mathscr{K}_x$ donc d'après 1.1 le faisceau $j'^*\mathscr{K}$ est plat. Enfin pour tout $y \in W$ on a $(j'^*\mathscr{K})_{|f'^{-1}(y)} = \mathscr{K}_{|f^{-1}(y)}$; il résulte alors de ([Gr] 2.8) que $j'^*\mathscr{K}$ est $f'_!$-mou.

On a $j'^*(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}) = j'^*\mathscr{A} \otimes j'^*\mathscr{K}$, donc pour démontrer (3.1.1) il suffit de démontrer que pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X on a

$$j^* f_!(\mathscr{F}) = f'_!(j'^*\mathscr{F}).$$

Or pour tout $y \in W$ on a, d'après ([Gr], prop. 2.6),

$$\begin{aligned} j^* f_!(\mathscr{F})_y &= f_!(\mathscr{F})_y = \Gamma_c(f^{-1}(y); \mathscr{F}_{|f^{-1}(y)}) \\ &= \Gamma_c(f'^{-1}(y); (j'^*\mathscr{F})_{|f'^{-1}(y)}) = f'_!(j'^*\mathscr{F})_y \end{aligned}$$

Maintenant soit $U \in \mathrm{Ouv}(W') \subset \mathrm{Ouv}(X)$. On a évidemment $(j'^*\mathscr{K})_U = j'^*(\mathscr{K}_U)$ et d'après (3.1.1) on a $f'_!(j'^*\mathscr{K}_U) = j^* f_!(\mathscr{K}_U)$. Donc pour démontrer (3.1.2) il suffit de démontrer que

$$\mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}) = \mathrm{Hom}(j^* f_!(\mathscr{K}_U); j^*\mathscr{B}).$$

Mais cet isomorphisme est évident car d'après ([Gr], prop. 2.6) le support du faisceau $f_!(\mathscr{K}_U)$ est contenu dans W.

3.2. Pour définir un morphisme de faisceaux

$$\lambda_{A,\mathscr{B}} : \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to f_* \mathscr{H}om(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

il faut construire une famille $\{\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(W)\}_{W \in \mathrm{Ouv}(Y)}$ de morphismes

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(W) : \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})_{|W}; \mathscr{B}_{|W}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}_{|f^{-1}(W)}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})_{|f^{-1}(W)})$$

qui soient compatibles avec les morphismes de restriction.

Compte tenu du lemme 3.1 il suffit donc de définir pour toute application $f : X \to Y$ et pour tout faisceau $\mathscr{K}$ sur X qui satisfont les hypothèses du N° 2.1, un morphisme (que par abus on note encore λ)

$$\lambda : \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

qui vérifie la condition suivante:

(3.2.1) Si $W \in \mathrm{Ouv}(Y)$ et si on pose, avec les notations du lemme 3.1, $\mathscr{A}' = j'^{*}\mathscr{A}$, $\mathscr{K}' = j'^{*}\mathscr{K}$ et $\mathscr{B}' = j^{*}\mathscr{B}$, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f_{!}^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^{!}_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(f'_{!}{}^{\mathscr{K}'}(\mathscr{A}'); \mathscr{B}') & \xrightarrow[\lambda']{} & \mathrm{Hom}(\mathscr{A}'; f'^{!}_{\mathscr{K}'}(\mathscr{B}')) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les morphismes naturels de restriction.

3.3. L'existence du morphisme λ du théorème 2.6. est donc contenue dans le résultat plus précis suivant, dont la démonstration sera donnée au N° 3.7.

PROPOSITION. *Pour toute application $f: X \to Y$ et tout faisceau $\mathscr{K}$ sur X qui satisfont les hypothèses du N° 2.1, il existe un morphisme de bifoncteurs*

$$\lambda: \mathrm{Hom}(f_{!}^{\mathscr{K}}(-); -) \to \mathrm{Hom}(-; f^{!}_{\mathscr{K}}(-))$$

qui vérifie la condition (3.2.1).

De plus on a les propriétés suivantes:

(3.3.1) *Si* $\mathscr{A} = \bigoplus_{j \in J} \mathscr{A}_j$ *alors* $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}} = \prod_{j \in J} \lambda_{\mathscr{A}_j, \mathscr{B}}$.

(3.3.2) *Si* $\mathscr{B} = \prod_{i \in I} \mathscr{B}_i$ *alors* $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}} = \prod_{i \in I} \lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}_i}$.

3.4. Le fait fondamental qui permet de construire explicitement λ est formulé de la façon suivante.

LEMME. *Pour tout $\mathscr{A} \in Sh(X)$ il existe une famille*

$$\mu_{\mathscr{A}} = \{\mu(U, V)\}_{(U, V) \in \mathrm{Ouv}(X) \times \mathrm{Ouv}(Y)}$$

de morphismes

$$\mu(U, V): \mathscr{A}(U) \otimes f_{!}(\mathscr{K}_U)(V) \to f_{!}^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V)$$

qui vérifie les propriétés suivantes:

(3.4.1) *Si $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V' \subset V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) & \xrightarrow{\mu(U,V)} & f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V) \\ 1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \rho_{V',V} \downarrow & & \downarrow \rho_{V',V} \\ \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V') & \xrightarrow[\mu(U,V')]{} & f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V') \end{array}$$

est commutatif

(3.4.2) *Si* $U' \subset U \in \mathrm{Ouv}(X)$ *et* $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ *alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) & \xrightarrow{1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \bar{r}_{U',U}(V)} & \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \\ \rho_{U',U} \otimes 1_{f_!(\mathscr{K}_{U'})(V)} \downarrow & & \downarrow \mu(U,V) \\ \mathscr{A}(U') \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) & \xrightarrow[\mu(U',V)]{} & f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V) \end{array}$$

(où $\bar{r}_{U',U}$ *est le morphisme induit par le morphisme canonique d'extension* $r_{U',U}: \mathscr{K}_{U'} \to \mathscr{K}_U$*) est commutatif.*

(3.4.3) $\mu_{\mathscr{A}}$ *est fonctoriel par rapport à* $\mathscr{A}$.

(3.4.4) *Si* $\mathscr{A} = \bigoplus_{j \in J} \mathscr{A}_j$ *alors* $\mu_{\mathscr{A}} = \bigoplus_{j \in J} \mu_{\mathscr{A}_j}$.

Démonstration. Il suffit de définir, pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$, une application bilinéaire

$$\mu(U; V): \mathscr{A}(U) \times f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to f_!(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K})(V).$$

Rappelons que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est le faisceau des sections de l'espace étalé $\mathscr{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}) = \coprod_{x \in X} \mathscr{A}_x \otimes \mathscr{K}_x$.

Soit $t \in f_!(\mathscr{K}_U)(V) = \Gamma_{\Phi_V}(f^{-1}(V); \mathscr{K}_U)$. Donc $t \in \Gamma(U \cap f^{-1}(V); \mathscr{K})$; de plus le support $|t|$ de t est fermé dans $f^{-1}(V)$ et l'application $f_{|||t|}: |t| \to V$ est propre.

Soit encore $s \in \mathscr{A}(U)$. Considérons l'application

$$\tilde{r}: U \cap f^{-1}(V) \to \mathscr{L}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K})$$

définie en posant, pour tout $x \in U \cap f^{-1}(V)$,

$$\tilde{r}(x) = \rho_{U \cap f^{-1}(V),U}(s)_x \otimes t_x$$

On a donc $\tilde{r} \in \Gamma\big(U \cap f^{-1}(V); \mathscr{A} \otimes \mathscr{K}\big)$ ([T]; chap. 4, 4.9). Comme

$$|\tilde{r}| \subset |\rho_{U \cap f^{-1}(V), U}(s)| \cap |t| \subset |t|,$$

le support $|\tilde{r}|$ de $\tilde{r}$ est fermé dans $f^{-1}(V)$, si bien qu'on peut étendre $\tilde{r}$ par zéro sur $f^{-1}(V) \backslash U \cap f^{-1}(V)$ pour obtenir une section

$$r \in \Gamma\big(f^{-1}(V); \mathscr{A} \otimes \mathscr{K}\big).$$

Soit un compact $K \subset V$; alors $f^{-1}_{||r|}(K)$ est compact car

$$f^{-1}_{||r|}(K) = \big(f^{-1}(K) \cap |t|\big) \cap |r|$$

et $f^{-1}(K) \cap |t|$ est compact par hypothèse. Il en résulte que

$$r \in \Gamma_{\Phi_V}\big(f^{-1}(V); \mathscr{A} \otimes \mathscr{K}\big) = f_!(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K})(V).$$

On définit alors l'application bilinéaire $\mu(U, V)$ en posant

$$\mu(U, V)(s; t) = r$$

Les propriétés (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) et (3.4.4) se vérifient par calculs directs à partir de cette définition.

3.5. Désignons par

$$\prod{}' \operatorname{Hom}\big(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)\big)$$

le sous-espace de

$$\prod_{(U,V) \in \operatorname{Ouv}(X) \times \operatorname{Ouv}(Y)} \operatorname{Hom}\big(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)\big)$$

des familles de morphismes

$$\psi(U, V) : \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to \mathscr{B}(V)$$

qui vérifient les conditions suivantes :

(3.5.1) Si $U \in \operatorname{Ouv}(X)$ et $V' \subset V \in \operatorname{Ouv}(Y)$ alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) & \xrightarrow{\psi(U,V)} & \mathscr{B}(V) \\
1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \rho_{V',V} \downarrow & & \downarrow \rho_{V',V} \\
\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V') & \xrightarrow[\psi(U,V')]{} & \mathscr{B}(V')
\end{array}$$

est commutatif.

(3.5.2) Si $U' \subset U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) & \xrightarrow{1_{\mathscr{A}(U)} \otimes \bar{r}_{U',U}(V)} & \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \\ \rho_{U',U} \otimes 1_{f_!(\mathscr{K}_{U'})(V)} \downarrow & & \downarrow \psi(U,V) \\ \mathscr{A}(U') \otimes f_!(\mathscr{K}_{U'})(V) & \xrightarrow[\psi(U',V)]{} & \mathscr{B}(V) \end{array}$$

est commutatif.

3.6. LEMME. *Pour tout* $\mathscr{A} \in Sh(X)$ *et* $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ *il existe un isomorphisme*

$$\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \to \prod{}' \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

qui vérifie les propriétés suivantes:

(3.6.1) $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ *est fonctoriel par rapport à* $\mathscr{A}$ *et à* $\mathscr{B}$.

(3.6.2) *Si* $\mathscr{A} = \bigoplus_{j \in J} \mathscr{A}_j$ *alors* $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \prod_{j \in J} \Psi_{\mathscr{A}_j,\mathscr{B}}$.

(3.6.3) *Si* $\mathscr{B} = \prod_{i \in I} \mathscr{B}_i$ *alors* $\Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \prod_{i \in I} \Psi_{\mathscr{A},\mathscr{B}_i}$.

Démonstration. Par définition un morphisme $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$ consiste en une famille

$$\{\psi(U)\}_{U \in \mathrm{Ouv}(X)} \in \prod_{U \in \mathrm{Ouv}(X)} \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U); \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}))$$

de morphismes compatibles avec les morphismes de restriction et si $s \in \mathscr{A}(U)$ alors $\psi(U)(s)$ est une famille

$$\{\psi(U)(s)(V)\}_{V \in \mathrm{Ouv}(Y)} \in \prod_{V \in \mathrm{Ouv}(Y)} \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

de morphismes compatibles avec les morphismes de restriction. Pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ on définit un morphisme

$$\bar{\psi}(U,V) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U); \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V))$$

en posant $\bar{\psi}(U,V)(s) = \psi(U)(s)(V)$ pour tout $s \in \mathscr{A}(U)$. De plus on a un isomorphisme canonique

$$\Phi(U,V) : \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U); \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)).$$

On pose alors $\psi(U, V) = \Phi(U, V)\left(\bar{\psi}(U, V)\right)$. Les conditions (3.5.1) et (3.5.2) sont satisfaites.

En effet la condition (3.5.1) est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_!(\mathscr{K}_U)(V) & \xrightarrow{\bar{\psi}(U, V)(s)} & \mathscr{B}(V) \\ \rho_{V', V} \downarrow & & \downarrow \rho_{V', V} \\ f_!(\mathscr{K}_U)(V') & \xrightarrow[\bar{\psi}(U, V')(s)]{} & \mathscr{B}(V') \end{array}$$

et cette commutativité résulte des conditions de compatibilité des morphismes $\psi(U)(s)(V)$.

De même la condition (3.5.2) est équivalente à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(U) & \xrightarrow{\bar{\psi}(U, V)} & \mathrm{Hom}\left(f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)\right) \\ \rho_{U', U} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}\left(\bar{r}_{U', U}(V); 1_{\mathscr{B}(V)}\right) \\ \mathscr{A}(U') & \xrightarrow[\bar{\psi}(U', V)]{} & \mathrm{Hom}\left(f_!(\mathscr{K}_{U'})(V); \mathscr{B}(V)\right) \end{array}$$

et cette commutativité résulte des conditions de compatibilité des morphismes $\psi(U)$.

On peut donc définir le morphisme $\Psi_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}$ en posant

$$\Psi_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}(\psi) = \{\psi(U, V)\}_{(U, V) \in \mathrm{Ouv}(X) \times \mathrm{Ouv}(Y)}$$

Les propriétés (3.6.1), (3.6.2) et (3.6.3) se vérifient immédiatement par calculs directs.

On obtient le morphisme réciproque de $\Psi_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}$ en associant à la famille

$$\{\psi(U, V)\}_{(U, V) \in \mathrm{Ouv}(X) \times \mathrm{Ouv}(Y)} \in \prod{}' \mathrm{Hom}\left(\mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V); \mathscr{B}(V)\right)$$

le morphisme de faisceaux $\psi: \mathscr{A} \to f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})$, défini en posant, pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $s \in \mathscr{A}(U)$, $\psi(U)(s) = \psi_s(U)$ où $\psi_s(U): f_!(\mathscr{K}_U) \to \mathscr{B}$ est le morphisme de faisceaux donné, pour tout $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$, par

$$\psi_s(U)(V) = \Phi(U, V)^{-1}\left(\psi(U, V)\right)(s).$$

3.7. *Démonstration de la proposition 3.3.* Si $\mathscr{A} \in Sh(X)$ et $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ on définit un morphisme

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : \mathrm{Hom}\big(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}\big) \to \mathrm{Hom}\big(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})\big)$$

de la façon suivante. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}\big(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}\big)$; pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ considérons le morphisme

$$\psi(U, V) = \varphi(V) \circ \mu(U, V) : \mathscr{A}(U) \otimes f_!(\mathscr{K}_U)(V) \to \mathscr{B}(V),$$

où $\mu(U, V)$ est le morphisme défini dans le lemme 3.4. Il résulte immédiatement des propriétés (3.4.1) et (3.4.2) et des conditions de compatibilité des morphismes $\varphi(V)$, que les morphismes $\psi(U, V)$ satisfont les conditions (3.5.1) et (3.5.2). On peut donc poser

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi) = \Psi^{-1}_{\mathscr{A},\mathscr{B}}\big(\{\psi(U, V)\}_{(U,V)\in \mathrm{Ouv}(X)\times \mathrm{Ouv}(Y)}\big).$$

Plus explicitement, si $U \in \mathrm{Ouv}(X)$, $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$, $s \in \mathscr{A}(U)$ et $t \in f_!(\mathscr{K}_U)(V)$ on a

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi)(U)(s)(V)(t) = \varphi(V) \circ \mu(U, V)(s; t).$$

De cette dernière formule il découle facilement que la condition de compatibilité (3.2.1) est satisfaite si on remarque que par définition on a

$$f'^{\mathscr{K}'}_!(\mathscr{A}')(V) = f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A})(V)$$

pour tout $V \in \mathrm{Ouv}(W) \subset \mathrm{Ouv}(Y)$

et

$$f'^!_{\mathscr{K}'}(\mathscr{B}')(U) = f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})(U)$$

pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(W') \subset \mathrm{Ouv}(X)$.

La bifonctorialité de λ est une conséquence de (3.4.3) et (3.6.1). De plus les propriétés (3.3.1) et (3.3.2) sont des conséquences de (3.4.3), (3.6.2) et (3.6.3).

3.8. Il faut montrer maintenant que le morphisme de faisceaux

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : \mathscr{H}om\big(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}\big) \to f_*\mathscr{H}om\big(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})\big)$$

est un isomorphisme. D'après le N° 3.2 il suffit donc de montrer que le morphisme

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}, f^!_{\mathscr{K}}; (\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme. On commence par considérer le cas où $\mathscr{A} = R_U$. On note λ le morphisme $\lambda_{R_U,\mathscr{B}}$ défini dans la proposition 3.3.

3.9. LEMME. *Pour tout ouvert U de X, le morphisme*

$$\lambda: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U); \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(R_U; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. L'isomorphisme canonique $g: \mathscr{K}_U \to R_U \otimes \mathscr{K}$ ([Go] chap. II, 2.9) induit un isomorphisme $g: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U); \mathscr{B}) \to f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})(U)$. D'après ([Go], chap. II, Remarque 2.9.1) on a aussi un isomorphisme canonique $h: \mathrm{Hom}(R_U; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \to f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})(U)$. Pour démontrer que λ est un isomorphisme, il suffit donc de démontrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Hom}(R_U; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})(U) & \end{array}$$

est commutatif.

Notons 1 la section unité de R_U au-dessus de U. Soit $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ et $t \in f_!(\mathscr{K}_U)(V)$. Il est immédiat, d'après les définitions, que l'on a

$$\mu(U, V)(1; t) = g(f^{-1}(V))(t)$$

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(R_U); \mathscr{B})$. On a alors, compte tenu de la formule du N° 3.7,

$$\begin{aligned} h(\lambda(\varphi))(V)(t) &= \lambda(\varphi)(U)(1)(V)(t) = \varphi(V) \circ \mu(U, V)(1; t) \\ &= \varphi(V) \circ g(f^{-1}(V))(t) = g(\varphi)(V)(t); \end{aligned}$$

ainsi on a $h \circ \lambda = g$.

3.10. PROPOSITION. *Pour tout $\mathscr{A} \in Sh(X)$ et tout $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ le morphisme*

$$\lambda_{\mathscr{A},\mathscr{B}}: \mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La démonstration se fait en trois étapes.

i) Soit $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et supposons que $\mathscr{A} = R_U$; alors $\lambda_{R_U, \mathscr{B}}$ est un isomorphisme d'après le lemme 3.9.

ii) Supposons que $\mathscr{A} = \oplus R_U$. D'après (3.3.1) on a $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}} = \Pi \lambda_{R_U, \mathscr{B}}$; donc $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}$ est un isomorphisme d'après l'étape i).

iii) Soit $\mathscr{A}$ un faisceau sur X.

D'après le corollaire 1.3 on peut trouver une suite exacte

$$\mathscr{Q} \to \mathscr{P} \to \mathscr{A} \to 0$$

où les faisceaux $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont de la forme $\oplus R_U$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}} & \mathrm{Hom}(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{P}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{P}, \mathscr{B}}} & \mathrm{Hom}(\mathscr{P}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{Q}); \mathscr{B}) & \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{Q}, \mathscr{B}}} & \mathrm{Hom}(\mathscr{Q}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))
\end{array}$$

Les colonnes de ce diagramme sont exactes car les foncteurs $\mathrm{Hom}(f_!^{\mathscr{K}}(-); \mathscr{B})$ et $\mathrm{Hom}(-; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$ sont exacts gauche. Les deux flèches $\lambda_{\mathscr{P}, \mathscr{B}}$ et $\lambda_{\mathscr{Q}, \mathscr{B}}$ sont des isomorphismes en vertu de l'étape ii). On en déduit alors aisément que $\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}}$ est un isomorphisme.

3.11. COROLLAIRE. *Pour tout* $\mathscr{A} \in Sh(X)$ *et tout* $\mathscr{B} \in Sh(Y)$ *le morphisme de faisceaux*

$$\lambda_{\mathscr{A}, \mathscr{B}} : \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}}(\mathscr{A}); \mathscr{B}) \to f_* \mathscr{H}om(\mathscr{A}; f^!_{\mathscr{K}}(\mathscr{B}))$$

est un isomorphisme.

4. Le théorème de dualité

4.1. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie.

Supposons pour toute la suite de ce paragraphe que l'anneau R est noethérien. D'après le théorème 1.5 on peut trouver une $f_!$-résolution $0 \to R_X \to \mathscr{K}^\cdot$ du faisceau R_X par des faisceaux plats.

4.2. Si $\mathscr{A}^\cdot \in \mathrm{Ob}K(X)$ on définit un complexe double $f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot)$ en posant $[f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot)]^{p,q} = f_!^{\mathscr{K}^p}(\mathscr{A}^q)$, les différentielles étant induites par celles de $\mathscr{K}^\cdot$ et de $\mathscr{A}^\cdot$ respectivement. En prenant le complexe simple associé on en déduit un foncteur, encore noté $f_!^{\mathscr{K}^\cdot}$, de $K(X)$ dans $K(Y)$.

Si $\mathscr{B}^\cdot \in \mathrm{Ob}K(Y)$ on peut encore définir un complexe triple

$$\mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot); \mathscr{B}^\cdot)$$

en posant

$$[\mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot); \mathscr{B}^\cdot)]^{p,q,r} = \mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^{-p}}(\mathscr{A}^{-q}); \mathscr{B}^r),$$

les différentielles étant induites par celle de $\mathscr{K}^\cdot$, de $\mathscr{A}^\cdot$ et de $\mathscr{B}^\cdot$ respectivement. Le complexe simple associé à ce complexe triple est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe double des homomorphismes du complexe simple associé au complexe double $f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot)$ dans le complexe $\mathscr{B}^\cdot$.

4.3. D'une façon analogue on définit un complexe double $f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot)$ en posant $[f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot)]^{p,q} = f^!_{\mathscr{K}^{-p}}(\mathscr{B}^q)$. En prenant le complexe simple associé on en déduit un foncteur, encore noté $f^!_{\mathscr{K}^\cdot}$, de $K(Y)$ dans $K(X)$.

On peut aussi définir le complexe triple $\mathscr{H}om(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot))$ en posant

$$[\mathscr{H}om(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot))]^{p,q,r} = \mathscr{H}om(\mathscr{A}^{-q}; f^!_{\mathscr{K}^{-p}}(\mathscr{B}^r)).$$

Le complexe simple associé à ce complexe triple est canoniquement isomorphe au complexe simple associé au complexe double des homomorphismes du complexe $\mathscr{A}^\cdot$ dans le complexe simple associé au complexe double $f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot)$.

4.4. Proposition. *Il existe un isomorphisme de complexes de faisceaux sur* Y

$$\lambda^\cdot : \mathscr{H}om^\cdot(f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot); \mathscr{B}^\cdot) \to f_* \mathscr{H}om^\cdot(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot)).$$

Démonstration. Le corollaire 3.11 fournit, pour tout $(p, q, r) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, un isomorphisme

$$\lambda^{p,q,r}: [\mathscr{H}om(f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot); \mathscr{B}^\cdot)]^{p,q,r} \to [f_*\mathscr{H}om(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{B}^\cdot))]^{p,q,r},$$

compatibles avec les différentielles. On en déduit un isomorphisme de complexes triples. En passant aux complexes simples associés on obtient l'isomorphisme $\lambda^\cdot$.

4.5. Rappelons ([Gr], corollaire 3.10) qu'on définit le foncteur $f^!$ comme étant le foncteur dérivé du foncteur $f^!_{\mathscr{K}^\cdot}\cdot$.

4.6. THÉORÈME. *Soit $\mathscr{A}^\cdot$ un objet de la catégorie dérivée $D^-(X)$ et $\mathscr{B}^\cdot$ un objet de la catégorie dérivée $D^b(Y)$. Dans la catégorie $D^+(Y)$ on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om^\cdot(\mathbf{R}f_!(\mathscr{A}^\cdot); \mathscr{B}^\cdot) = \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathscr{H}om^\cdot(\mathscr{A}^\cdot; f^!(\mathscr{B}^\cdot)).$$

Démonstration. Soit $\mathscr{A}^\cdot \in \mathrm{Ob}D^-(X)$ et soit $0 \to R_X \to \mathscr{K}^\cdot$ une $f_!$-résolution du faisceau constant R_X par des faisceaux plats (théorème 1.5). On a $\mathscr{A}^\cdot \otimes R_X = \mathscr{A}^\cdot$ donc $0 \to \mathscr{A}^\cdot \to \mathscr{A}^\cdot \otimes \mathscr{K}^\cdot$ est une résolution de $\mathscr{A}^\cdot$ par des faisceaux $f_!$-mous (proposition 1.4) donc $f_!$-acycliques ([Gr] lemme 2.10).

Comme par hypothèse $f_!$ est de dimension cohomologique finie le foncteur $\mathbf{R}f_!: D(X) \to D(Y)$ existe et est donné par $\mathbf{R}f_!(\mathscr{A}^\cdot) = f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot)$; il induit un foncteur $\mathbf{R}f_!: D^-(X) \to D^-(Y)$ ([H] chap. I, corollaire 5.3).

Maintenant soit $\mathscr{B}^\cdot \in \mathrm{Ob}D^b(Y)$ et soit $0 \to \mathscr{B}^\cdot \to \mathscr{J}^\cdot$ une résolution injective de $\mathscr{B}^\cdot$. On a évidemment

$$\mathbf{R}(\mathscr{H}om^\cdot \circ (f_! \times 1_{K^b(Y)})) = \mathbf{R}\mathscr{H}om^\cdot \circ (\mathbf{R}f_! \times 1_{D^b(Y)})$$

donc ([H] chap. I, § 6).

$$\mathbf{R}\mathscr{H}om^\cdot(\mathbf{R}f_!\mathscr{A}^\cdot; \mathscr{B}^\cdot) = \mathscr{H}om^\cdot(f_!^{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{A}^\cdot); \mathscr{J}^\cdot). \tag{4.6.1}$$

D'un autre côté les faisceaux $f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{J}^\cdot)$ sont injectifs (corollaire 2.9), donc les faisceaux $\mathscr{H}om^\cdot(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{J}^\cdot))$ et $f_*\mathscr{H}om^\cdot(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{J}^\cdot))$ sont flasques ([Go] chap. II, lemme 7.3.2 et théorème 3.1.1). On a ainsi ([H], chap. I, prop. 5.4)

$$\mathbf{R}(f_* \circ \mathscr{H}om^\cdot \circ (1_{K(X)} \times f^!_{\mathscr{K}^\cdot}\cdot)) = \mathbf{R}f_* \circ \mathbf{R}\mathscr{H}om^\cdot \circ (1_{D(X)} \times \mathbf{R}f^!_{\mathscr{K}^\cdot}\cdot).$$

Donc

$$\mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathscr{H}om^\cdot(\mathscr{A}^\cdot; f^!(\mathscr{B}^\cdot)) = f_*\mathscr{H}om^\cdot(\mathscr{A}^\cdot; f^!_{\mathscr{K}^\cdot}(\mathscr{J}^\cdot)). \tag{4.6.2}$$

Le théorème résulte alors du fait que les membres de droite des égalités (4.6.1) et (4.6.2) sont isomorphes en vertu de la proposition 4.4.

4.7. Appliquons le théorème 4.6 au cas où $\mathscr{A}^{\cdot} = f^{!}(\mathscr{B}^{\cdot})$. Comme les foncteurs f_{*} et $\mathscr{H}om$ sont exacts gauche, en appliquant le foncteur cohomologique H^{0}, puis en prenant les sections globales, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^{b}(Y)}(\mathbf{R}f_{!}(f^{!}(\mathscr{B}^{\cdot})); \mathscr{B}^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{D^{b}(X)}(f^{!}(\mathscr{B}^{\cdot}); f^{!}(\mathscr{B}^{\cdot})).$$

L'image de $1_{f^{!}(\mathscr{B}^{\cdot})}$ par cet isomorphisme permet donc de définir une flèche d'adjonction

$$\mathbf{R}f_{!} \circ f^{!} \to 1_{D^{b}(Y)}.$$

Appendice A :

Les modules plats sur un anneau noethérien

A.1. Soit R un anneau commutatif unitaire et soit E un R-module. On sait que le foncteur $-\otimes E$ est toujours exact à droite. On dit alors que E est un module plat si ce foncteur est aussi exact à gauche. Cette condition est équivalente au fait que pour tout R-module M et M' et pour tout homomorphisme injectif $u: M' \to M$, l'homomorphisme $u\otimes 1_{E}: M'\otimes E \to M\otimes E$ est encore injectif ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 1).

A.2. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R. L'inclusion $j: \mathfrak{a} \to R$ induit un homomorphisme $\tilde{j}: \mathfrak{a}\otimes E \to E$ obtenu en composant l'homomorphisme $j\otimes 1_{E}$ avec l'isomorphisme canonique $R\otimes E = E$. On a alors le résultat suivant ([Bo2], chap. I, § 2, N° 3, remarque 1).

Lemme. *Pour que E soit un R-module plat il faut et il suffit que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R de type fini, l'homomorphisme $\tilde{j}: \mathfrak{a}\otimes E \to E$ soit injectif.*

A.3. Lemme. *Soit E un R-module de présentation finie et soit $\{F_{i}\}_{i\in I}$ une famille de R-modules. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\sigma: E\otimes(\prod_{i\in I} F_{i}) \to \prod_{i\in I}(E\otimes F_{i})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $L_1 \xrightarrow{\varphi} L_0 \xrightarrow{\psi} E \to 0$ une présentation de E, dans laquelle les R-modules L_0 et L_1 sont libres de type fini. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
L_1 \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\sigma_1} & \prod_{i\in I} (L_1 \otimes F_i) \\
\varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\
L_0 \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\sigma_0} & \prod_{i\in I} (L_0 \otimes F_i) \\
\psi' \downarrow & & \downarrow \psi'' \\
E \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\sigma} & \prod_{i\in I} (E \otimes F_i) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par φ et ψ et les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques. Comme le foncteur produit tensoriel est exact à droite et le foncteur produit est exact, les colonnes de ce diagramme sont exactes. Les homomorphismes σ_0 et σ_1 sont des isomorphismes d'après ([Bo1], chap. 2, § 3, corollaire 3 de la proposition 7). Il en résulte que σ est un isomorphisme.

A.4. PROPOSITION. *Si $\{F_i\}_{i\in I}$ est une famille de R-modules plats sur un anneau noethérien R, alors le R-module $\prod_{i\in I} F_i$ est plat.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R de type fini ; comme R est noethérien, le R-module $\mathfrak{a}$ est de présentation finie ([Bo2], chap. 1, § 2, lemme 8). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{a} \otimes (\prod_{i\in I} F_i) & \xrightarrow{\tilde{j}} & \prod_{i\in I} F_i \\
\sigma \downarrow & \nearrow_{\tilde{j}'} & \\
\prod_{i\in I} (\mathfrak{a} \otimes F_i) & &
\end{array}$$

où σ est un isomorphisme d'après le lemme A.3 et $\tilde{j}' = \prod_{i\in I} \tilde{j}_i$ est injectif d'après l'hypothèse et le lemme A.2. Il en résulte que $\tilde{j}$ est injectif et par suite le lemme A.2 montre que le module $\prod_{i\in I} F_i$ est plat.

Appendice B :

Le foncteur D

B.1. Reprenons les hypothèses du N° 2.1 mais supposons que Y est un point. Alors $f_! = \Gamma_c(X\,;-)$, X est un espace localement compact de c-dimension finie et $\mathscr{K}$ est un faisceau c-mou et plat ([Gr] 2.5.1 et 2.9.1). D'après la proposition 1.4, pour tout faisceau $\mathscr{A}$ sur X, le faisceau $\mathscr{A}\otimes\mathscr{K}$ est c-mou.

Soit encore N un R-module.

B.2. On définit un foncteur contravariant

$$D(-)\colon Sh(X)^0 \to Sh(X)$$

en posant

$$D(\mathscr{A}) = f^!_{\mathscr{A}\otimes\mathscr{K}}(N)\,.$$

Plus précisément $D(\mathscr{A})$ est le faisceau défini en posant

$$D(\mathscr{A})\,(U) = \mathrm{Hom}\big(\Gamma_c\big((\mathscr{A}\otimes\mathscr{K})_U\big)\,;\,N\big)$$

pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et

$$\rho_{U',U} = \mathrm{Hom}(\bar{r}_{U',U}\,;\,1_N)$$

pour tout U', $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ tels que $U' \subset U$.

B.3. Dans ([Bo], V, § 7) le théorème de dualité est démontré, d'une façon un peu indirecte, à l'aide du foncteur D. On notera que la propriété fondamentale suivante du foncteur D est une conséquence facile de la proposition 3.10 si on remarque que $D(R_X)_{|U} = D(R_U) = f^!_{\mathscr{K}_U}(N)$.

B.4. Théorème (A. Borel). *Il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$\mu\colon D(-) \to \mathscr{H}om\big(-\,;D(R_X)\big)$$

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] BOREL, A. *et al. Intersection Cohomology.* Progress in Mathematics, Vol. 50 (Birkhäuser 1984).

[Bo1] BOURBAKI, N. *Algèbre*, 3e édition (Hermann 1962).

[Bo2] —— *Algèbre commutative* (Hermann 1961).

[Br] BREDON, G. E. *Sheaf Theory* (McGraw-Hill 1967).

[Go] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux* (Hermann 1964).

[Gr] GRIVEL, P. P. Les foncteurs de la catégorie des faisceaux associés à une application continue. *Intersection Cohomology*, VI, p. 183-207, Progress in Mathematics, Vol. 50 (Birkhäuser 1984).

[H] HARTSHORNE, R. *Residues and Duality.* Lecture Notes in Math. 20 (1966).

[T] TENNISON, B. R. *Sheaf Theory.* London Mathematical Society. Lecture Notes Series 20 (1975).

[V] VERDIER, J. L. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. *Séminaire Bourbaki N° 300* (1965/66).

(Reçu le 8 août 1984)

Pierre-Paul Grivel

Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
Case Postale 240
CH – 1211 Genève 24

vide-leer-empty