Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 31 (1985), p. 227-247

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DUALITÉ DE VERDIER

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit R un anneau commutatif unitaire. Désignons par $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie $K(X)$ des complexes de faisceaux de R-modules sur un espace topologique X.

Si $f: X \to Y$ est une application continue entre espaces localement compacts, on peut définir des foncteurs $\mathbf{R}f_!: D(X) \to D(Y)$ et $f^!: D(Y) \to D(X)$, qui généralisent les foncteurs image directe et image inverse. On a alors le résultat suivant qui a été annoncé par Verdier dans [V].

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Si le foncteur $f_!$ est de dimension cohomologique finie et si l'anneau R est noethérien, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}om^{\bullet}(\mathbf{R}f_!(\mathscr{A}^{\bullet}); \mathscr{B}^{\bullet}) = \mathbf{R}f_*\mathbf{R}\,\mathscr{H}om^{\bullet}(\mathscr{A}^{\bullet}; f^!(\mathscr{B}^{\bullet}))$$

dans $D^+(Y)$, *où* $\mathscr{A}^{\bullet} \in \mathrm{Ob}D^-(X)$ *et* $\mathscr{B}^{\bullet} \in \mathrm{Ob}D^b(Y)$.

Ce théorème, qui à l'origine a joué un rôle en géométrie algébrique, trouve aujourd'hui son utilisation dans l'homologie d'intersection et la théorie des $\mathscr{D}$-modules.

Cette note est la suite obligée de [Gr]. Elle développe les détails de la démonstration du théorème de dualité en suivant un argument qui était déjà esquissé dans [V]. Je remercie N. Spaltenstein qui m'a suggéré la possibilité de définir directement et explicitement l'isomorphisme entre les deux foncteurs et à qui je dois également l'idée du lemme fondamental 3.4.

On reprend ici les notations introduites dans [Gr], à une exception près cependant. L'anneau de base est noté R (au lieu de A) et le faisceau constant sur X de fibre R est noté R_X (au lieu de $\mathbf{A}$).