1. Les foncteurs $f_!^K$ et $f_K^!$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. Les foncteurs $f_!^{\mathscr{K}}$ et $f_{\mathscr{K}}^!$

1.1. Un faisceau $\mathscr{P} \in \mathrm{Ob}Sh(X)$ est R-plat si le foncteur $-\underset{R}{\otimes}\mathscr{P}$ est exact. (S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau de base R on dira simplement que $\mathscr{P}$ est plat et on écrira $-\otimes\mathscr{P}$).

Un faisceau $\mathscr{P}$ est plat si et seulement si, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathscr{P}_x$ est un R-module plat. De plus $\mathscr{P}$ est plat si et seulement si $\mathscr{P}_U$ est plat pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$.

1.2. Proposition. *La catégorie $Sh(X)$ admet suffisamment d'objets plats.*

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Ob}Sh(X)$ il existe un épimorphisme $\mathscr{P} \to \mathscr{F} \to 0$ où $\mathscr{P}$ est un faisceau plat.

Notons W l'ensemble des couples $(U; s)$ où $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $s \in \mathscr{F}(U)$. Un tel couple détermine un morphisme $\tilde{s}: R_U \to \mathscr{F}$ de faisceaux sur X ([Go], chap. II, remarque 2.9.1). Ces morphismes induisent un morphisme $\bigoplus_W R_U \to \mathscr{F}$ qui par construction même est surjectif. Or le faisceau R_U est plat; donc d'après 1.1., ([Go], chap. II, 2.7) et [Bo2], chap. I, § 2, prop. 2), le faisceau $\bigoplus_W R_U$ est plat.

1.3. Corollaire. *Tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X admet une résolution plate $\mathscr{P}_\bullet \to \mathscr{F} \to 0$.*

1.4. Soit X et Y deux espaces localement compacts. Considérons une application continue $f: X \to Y$ telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie.

Proposition. *Soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X, $f_!$-mou et plat. Alors pour tout faisceau $\mathscr{A}$ sur X, le faisceau $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est $f_!$-mou.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.3 on peut trouver une résolution $\mathscr{P}_\bullet \to \mathscr{A} \to 0$ de $\mathscr{A}$ par des faisceaux de la forme $\mathscr{P}_j = \bigoplus_{W_j} R_U (j \geqslant 0)$. Comme $\mathscr{K}$ est plat la suite $\mathscr{P}_\bullet \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to 0$ est une résolution de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n et posons $\mathscr{B} = \mathrm{Ker}(d_n \otimes 1_{\mathscr{K}})$. Alors la suite

$$0 \to \mathscr{B} \to \mathscr{P}_n \otimes \mathscr{K} \to \ldots \to \mathscr{P}_0 \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to 0$$

est une résolution bornée du faisceau $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{K}$ est $f_!$-mou, les faisceaux

$\mathscr{P}_j \otimes \mathscr{K} = \bigoplus_{W_j} R_U \otimes \mathscr{K} = \bigoplus_{W_j} \mathscr{K}_U (0 \leqslant j \leqslant n)$ sont $f_!$-mous ([Gr], lemme 2.10). L'argument standard utilisé dans ([Gr], th. 2.12) montre que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}$ est $f_!$-mou.

1.5. THÉORÈME. *Supposons que l'anneau R est noethérien. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau plat sur X. Alors $\mathscr{F}$ admet une $f_!$-résolution $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{K}^\bullet$, dans laquelle les faisceaux $\mathscr{K}^j$ sont plats $(j \geqslant 0)$.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^\bullet$ la résolution flasque canonique de $\mathscr{F}$ ([Go], chap. II, 4.3) et posons $\mathscr{Z}^j = \operatorname{Coker}(d : \mathscr{C}^{j-1} \to \mathscr{C}^j)$ $(j \geqslant 1)$. Supposons que la dimension cohomologique de $f_!$ est inférieure à n. Alors la suite exacte

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \ldots \to \mathscr{C}^n \to \mathscr{Z}^{n+1} \to 0$$

est une $f_!$-résolution de $\mathscr{F}$. En effet les faisceaux $\mathscr{C}^j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ étant flasques, ils sont $f_!$-mous ([Br], chap. II, coroll. 2.5 et [Gr], lemme 2.10) et par un argument standard ([Gr], th. 2.12) le faisceau $\mathscr{Z}^{n+1}$ est aussi $f_!$-mou.

Il reste donc à montrer que les faisceaux $\mathscr{C}^j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ et $\mathscr{Z}^{n+1}$ sont plats.

La construction de la résolution flasque étant inductive, il suffit de démontrer par récurrence que, pour tout entier $j \geqslant 0$, les faisceaux $\mathscr{C}^j$ et $\mathscr{Z}^{j+1}$ sont plats.

Pour tout $U \in \operatorname{Ouv}(X)$ on a $\mathscr{C}^0(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$. Par hypothèse les modules $\mathscr{F}_x$ sont plats sur l'anneau noethérien R, donc $\mathscr{C}^0(U)$ est un module plat (voir Appendice A). Il en résulte que pour tout $x \in X$ le module $\mathscr{C}^0_x = \varinjlim_{U \in \mathscr{V}_x} \mathscr{C}^0(U)$ est plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) et par suite $\mathscr{C}^0$ est un faisceau plat.

De plus considérons la suite exacte scindée ([Br], chap. II, § 2)

$$0 \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{C}^0_x \to \mathscr{Z}^1_x \to 0$$

dans laquelle les deux premiers termes sont des modules plats. Alors le module $\mathscr{Z}^1_x$ est aussi plat ([Bo2], chap. I, § 2, prop. 2) donc le faisceau $\mathscr{Z}^1$ est plat.

Maintenant supposons que les faisceaux $\mathscr{C}^q$ et $\mathscr{Z}^{q+1}$ sont plats pour $0 \leqslant q \leqslant p-1$ avec $p \geqslant 1$. On a $\mathscr{C}^p(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{Z}^p_x$. Par hypothèse de récurrence les modules $\mathscr{Z}^p_x$ sont plats, donc le même argument que précédemment montre que le faisceau $\mathscr{C}^p$ est plat et en considérant la suite exacte scindée

$$0 \to \mathscr{Z}^p_x \to \mathscr{C}^p_x \to \mathscr{Z}^{p+1}_x \to 0$$

on en déduit que le faisceau $\mathscr{Z}^{p+1}$ est plat.

1.6. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts, telle que le foncteur $f_!$ soit de dimension cohomologique finie et soit $\mathscr{K}$ un faisceau sur X qui soit $f_!$-mou et plat. La composition des foncteurs

$$Sh(X) \xrightarrow{-\otimes\mathscr{K}} Sh(X) \xrightarrow{f_!} Sh(Y)$$

définit un foncteur $f_!^{\mathscr{K}}: Sh(X) \to Sh(Y)$ qui commute aux sommes directes puisque chacun des foncteurs qui le compose commute aux sommes directes ([Gr], th. 2.15).

1.7. PROPOSITION. *Le foncteur* $f_!^{\mathscr{K}}$ *est exact.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X. Comme $\mathscr{K}$ est plat la suite

$$0 \to \mathscr{A}' \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{K} \to \mathscr{A}'' \otimes \mathscr{K} \to 0$$

est exacte et formée de faisceaux $f_!$-mous en vertu de la proposition 1.4. Il résulte alors des propriétés du foncteur $R^i f_!$ que la suite

$$0 \to f_!(\mathscr{A}' \otimes \mathscr{K}) \to f_!(\mathscr{A} \otimes \mathscr{K}) \to f_!(\mathscr{A}'' \otimes \mathscr{K}) \to 0$$

est exacte.

1.8. Rappelons que le foncteur

$$f_{\mathscr{K}}^!: Sh(Y) \to Sh(X)$$

est défini de la façon suivante ([Gr], § 3): pour tout faisceau $\mathscr{B}$ sur Y et pour tout $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ on pose

$$f_{\mathscr{K}}^!(\mathscr{B})(U) = \mathrm{Hom}(f_!(\mathscr{K}_U); \mathscr{B}).$$

Il est évident que le foncteur $f_{\mathscr{K}}^!$ est exact gauche et qu'il commute aux produits directs.