Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

Autor: Danset, Renaud

Kapitel: A) Présentation générale

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE
ET
PRINCIPE DE HASSE FIN
POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

par Renaud DANSET

INTRODUCTION

A) PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Soit, pour tout ce travail, $f = (f_1, ..., f_r)$ un ensemble de r formes, de degré $d \geqslant 2$, en n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ et à coefficients entiers. On prendra toujours $r \leqslant n$. (N.B. : « forme » signifie « polynôme homogène »).

Une conjecture attribuée à Artin dit que, si d est impair et $n > rd^2$, le système diophantien $f = 0$ admet des solutions entières non triviales (on dit que f représente zéro). Cette conjecture tente de préciser l'idée selon laquelle si d est impair, ou pair mais avec des conditions nécessaires évidentes et s'il y a suffisamment de variables, alors le système f représente zéro.

Birch (1957, Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, *Mathematika* 4, 102-105) montre, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto N(d)$ telle que toute forme de degré impair d, en n variables avec $n \geqslant N(d)$ représente zéro; mais sa méthode conduit à des valeurs $N(d)$ astronomiques.

En fait cette conjecture est tellement inaccessible que, dans le cas le plus simple, $d = 3$ et $r = 1$, Davenport (cf. bibliographie) a démontré, à la suite d'un énorme et remarquable travail, que toute forme cubique à coefficients entiers ayant au moins 16 variables, représente zéro. Non seulement 16 n'est pas 10, mais rien d'aussi précis n'est connu pour les autres couples (d, r).

Une forme plus faible de la conjecture d'Artin est la suivante: pour tout $d \geqslant 2$, si $n > rd^2$, le système $f = 0$ admet des solutions non triviales dans $\mathbf{Q}_P$ (on dit que f représente zéro dans $\mathbf{Q}_P$) pour tout entier premier p. Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Hasse (cf. par exemple Borevitch-Chafarevitch, chapitre I, théorème 5). Le cas $d = 3$, $r = 1$ a été

démontré simultanément mais de manières différentes par Demyanov (1950, On cubic forms in discretely normed fields, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 74*, 889-891) par Lewis (Cubic homogeneous polynomials over p-adic number-fields, *Annals Math. 56*, 1952, 473-478) et Davenport (Cubic forms in 32 variables, cf. bibliographie). Le cas $d = 2$, $r = 2$ a été démontré par Demyanov, une démonstration simplifiée se trouvant dans Birch, Lewis, Murphy, Simultaneous quadratic forms, *Amer. J. Math. 84, n° 1*, 1962, 110-115.

Cette seconde conjecture n'a, elle aussi, été démontrée pour aucun autre couple (d, r). Cependant Brauer (1945, A note on systems of homogeneous algebraic equations, *Bull. Amer. Math. Soc. 51*, 749-755) a montré, pour $r = 1$, qu'il existe une fonction $d \mapsto M(d)$ telle que toute forme de degré d ayant au moins $M(d)$ variables représente zéro dans $\mathbf{Q}_p$ pour tout p. Dans son travail cité ci-dessus, Birch a utilisé ce résultat de Brauer, malheureusement la méthode, on l'a déjà dit, ne donne pas des valeurs $M(d)$ raisonnables.

On peut citer aussi Ax et Kochen (1965, Diophantine problems over local fields, I, II, *Amer. J. Math. 87*, 605-645) qui ont prouvé que pour un degré d donné, la seconde conjecture est vraie pour toutes les valeurs de p sauf peut-être pour un nombre fini, dépendant de d et dans le cas $r = 1$. Lang a aussi démontré que si la conjecture était vraie pour $r = 1$, elle était également vraie pour tout $r > 1$. (On quasi algebraic closure, *Ann. Math. 55, n° 2*, 1952, 373-390). Enfin Terjanian (*C.R. Acad. Sci., 262*, 1966, A612) a construit un polynôme homogène de degré 4 à 18 variables qui ne représente pas 0 dans $\mathbf{Q}_2$ ce qui constitue un contre-exemple à la conjecture, mais d'un type particulier...! Notons pour terminer qu'il est facile de montrer que la valeur hypothétique $r\,d^2$ est une borne inférieure (cf. Borevitch-Shafarevitch, Ch. I, § 6-5).

Le lien entre les deux conjectures précédemment citées est ce qu'on appelle le Principe de Hasse; si le système $f = 0$ représente zéro dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$ alors il représente zéro dans $\mathbf{Q}$. Le cas $d = 2$, $r = 1$ constitue le Théorème de Minkowsky-Hasse (cf. Borevitch-Shafarevitch, ch. I, § 7), associé au théorème de Hasse mentionné ci-dessus, il devient le théorème de Meyer: *toute forme quadratique à coefficients entiers, indéfinie et ayant au moins cinq variables, représente zéro.* Malheureusement Selmer (The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$, *Acta Math. 85, n° 3-4*, 1951, 203-362) a montré en particulier que la forme cubique $3x^3 + 4y^3 + 5z^3$ représente zéro dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_p$ mais pas dans $\mathbf{Q}$. Enfin il existe beaucoup d'autres contre-exemples qui infirment le Principe de Hasse lorsque $d \geqslant 3$.

Que peut-on faire avec deux conjectures inaccessibles et un Principe faux ?... Restreindre considérablement ses ambitions !

Il existe plusieurs façons d'affaiblir le Principe de Hasse (cf. M. de La Palice); celle qui est utilisée dans ce travail se définit comme suit et s'appelle

PRINCIPE DE HASSE FIN : Si le système diophantien $f = 0$ possède une solution *non singulière* (N.B. : cette dernière est forcément non triviale !) dans $\mathbf{R}$ et dans tous les $\mathbf{Q}_P$, alors le système f représente zéro dans $\mathbf{Q}$.

Cette nouvelle version ne résiste pas mieux au contre-exemple de Selmer mais l'expérience a montré sa validité pour des classes suffisamment importantes de systèmes f et en particulier pour ceux considérés dans ce travail.

Pour obtenir ses résultats sur les formes cubiques, évoqués ci-dessus (cf. également le paragraphe 5D du présent travail) Davenport utilise la méthode dite « du cercle » de Hardy et Littlewood. Birch (Forms in many variables, 1962, cf. bibliographie et § 5B du présent travail) s'inspire des résultats de Davenport en les généralisant considérablement. Enfin, W. M. Schmidt, vers 1980, reprend la méthode du cercle comme l'avait fait Birch mais pour le cas $d = 2$, $r > 1$.

Puisque la méthode du cercle étudie un certain type de sommes trigonométriques associées au système f, *il a paru intéressant d'exprimer la propriété précise de ces sommes* qui permet le succès du principe de Hasse fin pour les systèmes f concernés.

Cette propriété (constituée par les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous formulées) n'est pas de tout repos. Trouver une qualité du système f qui entraîne cette propriété des sommes trigonométriques associées et donc l'application du Principe de Hasse fin, est un problème difficile que chaque auteur traite à sa façon, qui ne constitue pas l'objet du présent travail mais qui est résumé au paragraphe 5. Notons d'ailleurs que les dites « qualités », même si leurs auteurs parviennent à leur donner une expression concise, sont difficilement compréhensibles d'un titulaire du baccalauréat et que leur vérification dans des cas généraux, c'est-à-dire exception faite des exercices « faits pour », n'est pas évidente.

Puisque la méthode du cercle établit une formule asymptotique, réduite en fait à sa partie principale dont le coefficient est le produit de facteurs représentant toutes les places de $\mathbf{Q}$, *il a paru intéressant de donner un exposé adélique de cette méthode*, suivant ainsi une tendance générale de ces dernières années et plus particulièrement Lachaud (1982 « une présentation adélique de la série singulière et du problème de Waring » cf. bibliographie).

On obtient ainsi:

1°) Une présentation unifiée des arcs majeurs.

2°) Une expression globale pour la série singulière et l'intégrale singulière qui met en évidence la transformée de Gauss globale F^* (selon la notation d'Igusa, cf. bibliographie) associée à une fonction de Schwarz-Bruhat d'un type précis.

Remarque. Un résultat analogue pour d'autres fonctions de Schwarz-Bruhat est une des espérances que ce travail peut susciter.

3°) L'exposé d'une méthode suffisamment générale comme le montrent les exemples du paragraphe 5 et dont les hypothèses initiales sont nettement dégagées.

4°) La démonstration au lemme 1-6 d'une majoration générale d'une somme de modules d'intégrales oscillantes.

B) Notations et Hypothèses principales

Soient $f = (f_1, ..., f_r)$ r formes de degré $d \geqslant 2$, en n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $r \leqslant n$ et à coefficients entiers.

Soit g un polynôme quelconque de degré $< d$ et à coefficients entiers, en les variables x.

Remarque. Tout ce travail pourrait se faire sans mentionner un tel polynôme g, sur ce point on pourra lire la remarque finale du paragraphe 1 et le paragraphe 5A.

Soit $\mathscr{B}$ une boîte de dimension n (parallélépipède de côtés parallèles aux axes de $\mathbf{R}^n$ ou encore: $\{x \in \mathbf{R}^n \mid 1 \leqslant i \leqslant n, a_i \leqslant x \leqslant b_i\}$) et de côtés au plus égaux à 1 (i.e.: $1 \leqslant i \leqslant n, b_i - a_i < 1$).

Soit $P \in \mathbf{R}_+$ et destiné à être très grand.

Soit $\varepsilon > 0$ et destiné à être très petit.

Soit $\nu \in \mathbf{Z}^r$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$ ou encore: $1 \leqslant i \leqslant r, 0 \leqslant \alpha_i < 1$.

Soit la somme trigonométrique

$$S(\alpha) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j f_j(x) + g(x)\right)\right]$$

On définit les hypothèses suivantes concernant les sommes trigonométriques $S(\alpha)$ et donc le système f: