Chapitre II. — Automorphismes de (C, 0) tangents á l'identité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Supposons maintenant qu'on ait $f = \delta' + k$, $k \in \mathscr{C}(\mathbf{Z})$; on vérifie immédiatement qu'on a $\delta' \circledast g = g$ (analogue de $\xi \circ \hat{g} = \hat{g}$), d'où $f \circledast g \in \delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$. On peut voir que l'opération $\circledast$ est associative sur $\delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$. Je ne sais pas si les éléments de $\delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$ sont tous inversibles; on a toutefois le résultat suivant ([E 1], p. 88).

THÉORÈME (I.6.10). (« Inversion locale »). *Soit* $g \in \delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$ *et supposons que la détermination principale de* $\operatorname{var} g$ *soit de monodromie finie autour de* 0 *(c'est-à-dire soit une fonction uniforme de* $x^{1/p}$, p *entier convenable). Alors* g *admet un inverse dans* $\delta' + \mathscr{C}(\mathbf{Z})$, *et cet inverse a la même propriété.*

CHAPITRE II. — AUTOMORPHISMES DE $(\mathbf{C}, 0)$ TANGENTS À L'IDENTITÉ

(II.1) GÉNÉRALITÉS

Soit G le groupe des germes d'automorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ tangents à l'identité; un élément de G est donc une application holomorphe

$$z \mapsto f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots ,$$

la série f étant convergente au voisinage de 0. On se propose de déterminer les classes de conjugaison de G.

Pour cela, on regarde d'abord le même problème pour le groupe $\hat{G}$ des automorphismes formels (i.e. ici, f est une série formelle); ici la classification est facile, et bien connue: en effet, tout f s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\exp(\xi)$, $\xi = (b_2 z^2 + \dots)\dfrac{d}{dz}$; le problème revient donc à classer les champs de vecteurs formels s'annulant à un ordre $\geqslant 2$, ou encore, en remplaçant ξ par $\dfrac{1}{\xi}$, les formes méromorphes formelles à pôle d'ordre $\geqslant 2$. La classification de ces formes sous $\hat{G}$ (qui coïncide d'ailleurs avec la classification des formes méromorphes convergentes sous G) est donnée par 2 invariants:

i) le coefficient du terme le plus polaire;

ii) le résidu.

En revenant à $\hat{G}$, on voit que la classe de f est donnée par 2 invariants:

i) le premier $a_p \neq 0$;

ii) un autre invariant, fabriqué avec $a_p, \ldots, a_{2p-1}$; on peut par exemple prendre le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans $\frac{1}{f(z) - z}$.

Exemple. $f(z) = z - z^2 + z^3 +$ (n'importe quoi); alors f est formellement conjugué à $f_0 = \frac{z}{1+z}$.

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, je travaillerai uniquement sur l'exemple de cette classe formelle; je renvoie aux articles d'Ecalle pour les modifications — inessentielles, mais un peu fastidieuses — à apporter dans le cas général.

Soient donc $f(z) = z - z^2 + z^3 + O(z^4) \in G$, et $f_0(z) = \frac{z}{1+z}$; il est commode de faire le changement de variables $\frac{1}{z} = \xi$, et de poser $g(\xi) = 1/f\left(\frac{1}{\xi}\right)$; on a alors $g_0(\xi) = \xi + 1$, $g(\xi) = \xi + 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{\xi^n}$; il existe une série formelle méromorphe et une seule en $\frac{1}{\xi}$ de la forme $\varphi(\xi) = \xi + O\left(\frac{1}{\xi}\right)$ qui vérifie $\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi (= \varphi + 1)$. Son inverse ψ est de la même forme et vérifie $g \circ \psi = \psi \circ g_0 (= \psi(\xi + 1))$. Ecalle les nomme respectivement « l'itérateur direct » et « l'itérateur inverse ».

On voit facilement ceci: soit g' une autre série analogue à g, et soit φ' son itérateur: pour que g et g' soient conjugués, il faut et il suffit que $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ soit convergent; en particulier, pour que g soit conjugué à g_0, il faut et il suffit que φ soit convergent.

Pour se faire une idée des obstructions à cette convergence, examinons d'abord le problème analogue pour une déformation infinitésimale d'ordre 1 de g_0, c'est-à-dire considérons la famille à 1 paramètre $g = g_0 + t\bar{g}$, $\bar{g}(\xi) = O(\xi^{-2})$; l'itérateur infinitésimal $\varphi = \xi + t\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi} = O(\xi^{-1})$ vérifie $\varphi \circ g = g_0 \circ \varphi \pmod{t^2}$, c'est-à-dire $\bar{\varphi}(\xi + 1) - \bar{\varphi}(\xi) = -\bar{g}(\xi)$; cette équation détermine la série formelle $\bar{\varphi}$ comme on le voit immédiatement en calculant terme à terme. L'obstruction à la convergence peut se voir classiquement de 2 manières.

1re manière (« Méthode sectorielle »)

Dans un demi-plan $\operatorname{Re}\xi \gg 0$, l'équation $\varphi_+(\xi+1) - \varphi_+(\xi) = -\bar{g}(\xi)$ a une solution et une seule tendant vers 0 à l'infini, à savoir la série $\sum_{n\geqslant 0} \bar{g}(\xi+n)$, et φ_+ se prolonge au plan privé d'une « demi bande arrondie » $\{|\xi| < R\} \cup \{|\operatorname{Im}\xi| < R; \operatorname{Re}\xi < 0\} = B_R^-$ (pour $R \gg 0$).

De même $\varphi_-(\xi) = -\sum_{n<0} \bar{g}(\xi+n)$ est une solution de la même équation hors de la demi bande arrondie B_R^+ définie de façon analogue; alors pour que φ converge, il faut et il suffit qu'on ait, pour $|\operatorname{Im}\xi| > R$: $\Sigma\bar{g}(\xi+n) = 0$; plus généralement, on voit que g et g' sont analytiquement conjugués à l'ordre 1 si et seulement si l'on a, pour $|\operatorname{Im}\xi| \gg 0$: $\Sigma\bar{g}(\xi+n) = \Sigma\bar{g}'(\xi+n)$.

2e manière (transformation de Borel)

Posons $\bar{g} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{\xi^n}$, $\bar{\varphi} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{\xi^n}$ et considérons leurs transformées de Borel $\bar{g}_B = Y\Sigma \frac{a_n}{(n-1)!} x^n$, $\bar{\varphi}_B = Y\Sigma \frac{b_n}{(n-1)!} x^n$; la première est un élément de $\tilde{\mathscr{C}}$, dont la variation $\Sigma \frac{a_n}{(n-1)!} x^n$ se prolonge en une série entière, et même entière de type exponentiel, parce que $\bar{g}$ converge à l'infini; a priori, la seconde est seulement une « microfonction formelle » qu'il suffit de définir par son expression, sans avoir besoin de définition générale. L'égalité $\bar{\varphi}(\xi+1) - \bar{\varphi}(\xi) = -\bar{g}(\xi)$ se traduit ici par l'égalité $(e^{-x}-1)\bar{\varphi}_B = -\bar{g}_B$; en particulier, on a $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B = \frac{-1}{(e^{-x}-1)} \operatorname{var}\bar{g}_B$; donc en fait, $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec des pôles simples sur $2\pi i\mathbf{Z} - \{0\}$; des obstructions à la convergence de φ sont ici les *résidus* de $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$. Ce sont en fait les seules obstructions: plus généralement si $\bar{g}'$ est une autre fonction analogue à $\bar{g}$, et si $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$ et $\operatorname{var}\bar{\varphi}'_B$ ont les mêmes résidus, alors $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B - \operatorname{var}\bar{\varphi}'_B$ est entière, et de la forme $\frac{1}{(e^{-x}-1)} \times$ (fonction entière de type exponentiel); il en résulte par des raisonnements classiques que $\operatorname{var}(\bar{\varphi}_B - \bar{\varphi}'_B)$ est entière de type exponentiel, donc que $\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'$ converge à l'infini, donc que g et g' sont analytiquement conjugués à l'ordre 1 (la réciproque est évidente).

Pour voir l'équivalence des 2 méthodes, il suffit de voir que les résidus de $\operatorname{var}\bar{\varphi}_B$ sont égaux aux coefficients de Fourier de la série $\Sigma\bar{g}(\xi+n)$; je laisse cette question au lecteur.

Nous allons voir maintenant comment les deux méthodes précédentes se généralisent au problème envisagé.

(II.2) La méthode sectorielle

Je serai ici très rapide, et renverrai pour les démonstrations à mon exposé [M]. Cette méthode se trouve essentiellement dans [E]; une variante a été retrouvée indépendamment par Voronin [V].

Soient g, g_0, φ comme ci-dessus.

Théorème (II.2.1) (Kimura [K]). *Pour* $R \gg 0$, *il existe une unique fonction* φ_+ (resp. φ_-), *holomorphe dans* $\mathbf{C} - B_R^-$ (resp. $\mathbf{C} - B_R^+$) *et possédant les propriétés suivantes:*

i) *dans tout secteur* $\{|\arg \xi| < \pi - \varepsilon\} - B_R^-$, φ_+ *admet* φ *pour développement asymptotique à l'infini; énoncé analogue pour* φ_-.

ii) *On a* $\varphi_+ \circ g = g_0 \circ \varphi_+$ *sur* $\mathbf{C} - B_{R'}^+$, *avec* $R' > R$ *convenable; énoncé analogue pour* φ_-.

Considérons alors la fonction $\varphi_+\varphi_-^{-1}$, définie dans $|\operatorname{Im} \xi| \gg 0$; dans tout secteur $\varepsilon < \arg \xi < \pi - \varepsilon$ et $-\pi + \varepsilon < \arg \xi < -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, cette fonction admet ξ pour développement asymptotique; posons alors $\varphi_+\varphi_-^{-1} = \xi + \chi$; χ est asymptotique à 0; de plus, le fait que $\varphi_+\varphi_-^{-1}$ commute à g_0 montre qu'on a $\chi(\xi+1) = \chi(\xi)$. Donc, on a

$$\text{(II.2.2)} \qquad \begin{aligned} &\text{dans} \quad \operatorname{Im} \xi \gg 0 : \chi(\xi) = \sum_{n \geqslant 1} \chi_n e^{2\pi i n \xi} \\ &\text{et dans} \quad \operatorname{Im} \xi \ll 0 : \chi(\xi) = \sum_{n \leqslant -1} \chi_n e^{2\pi i n \xi}. \end{aligned}$$

Soit alors g' une autre fonction analogue à g. Notons χ_g et $\chi_{g'}$ les « fonctions χ » correspondantes.

Théorème (II.2.3).

1) *Pour que* g *et* g' *soient conjugués, il faut et il suffit qu'on ait* $\chi_g = \chi_{g'}$.

2) *Réciproquement, soit* χ *une fonction périodique dans* $|\operatorname{Im} \xi| \gg 0$, *du type* (2.2). *Alors il existe* $g \in G$, *formellement conjugué à* g_0, *et telle qu'on ait* $\chi_g = \chi$.

La première assertion est immédiate. On trouvera dans [M] une démonstration rapide de la seconde. D'autres méthodes, plus explicites, se trouvent dans [E 2].

(II.3) Transformation de Borel et résurgence

La méthode précédente assez élémentaire, n'utilisait pas les résultats du chapitre I. Ici, au contraire, ils vont jouer un rôle essentiel.

Soient g, g_0 et φ comme précédemment, et définissons la « microfonction formelle » φ_B comme au n° 1. Observons d'abord que les fonctions φ_+ et φ_- définies au théorème (2.1) vérifient la majoration suivante: dans tout secteur $\varepsilon \leqslant \arg \xi \leqslant \pi - \varepsilon$ et $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg \xi \leqslant -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, $\varphi_+ - \varphi_-$ est, à l'infini, de l'ordre de $e^{-2\pi|\mathrm{Im}\,\xi|}$ [en effet, on a $\varphi_+\varphi_-^{-1} = \xi + \chi(\xi)$, d'où $\varphi_+ - \varphi_- = \chi \circ \varphi_-$ et il suffit d'utiliser les propriétés asymptotiques de φ_- et χ pour obtenir le résultat cherché]. On peut déduire de là, et de la théorie de la sommabilité de Borel que var φ_B est en fait holomorphe dans le plan privé des deux demi-droites $[2\pi i, i\infty[$ et $[-2\pi i, -i\infty[$. Je renvoie pour ces questions aux travaux sur la sommabilité de Borel, notamment à [R].

Ici, on va directement obtenir un résultat plus précis:

Théorème (II.3.1). *On a* $\varphi_B \in \tilde{\mathscr{C}}(2\pi i\mathbf{Z})$.

Ceci peut encore être précisé: soit a le point base choisi, et γ un chemin quelconque de $\mathbf{C} - 2\pi i\mathbf{Z}$ d'origine a et d'extrémité un point $b \in a + 2\pi i\mathbf{Z}$; on définit alors $\Delta_\gamma\varphi_B$ comme en (I.5.4). On a le résultat suivant qui donne l'expression des singularités de var φ_B:

Théorème (II.3.2). *Pour tout* γ *comme ci-dessus, on a*

$$\Delta_\gamma\varphi_B = a_\gamma\delta + Yg_\gamma,$$

avec $a_\gamma \in \mathbf{C}$, $g_\gamma \in \mathscr{O}$; *en particulier, on a* $\varphi_B \in \delta' + \mathscr{C}(2\pi i\mathbf{Z})$.

Indiquons le principe de la démonstration; pour les détails, voir [E 2], p. 311-318. Posons

$$\varphi(\xi) = \xi + \pi(\xi),\ g(\xi) = \xi + 1 + k(\xi+1);$$

l'équation $\varphi \circ g = \varphi + 1$ se réécrit $g + \pi \circ g = \xi + 1 + \pi$, ou encore $\pi(\xi + k(\xi)) = \pi(\xi - 1) - k(\xi)$.

En appelant K (resp. L) l'image réciproque par l'application $\xi \mapsto \xi + k(\xi)$ (resp. $\xi \mapsto \xi - 1$), cela s'écrit $K\pi = L\pi - k$, ou encore $(L-I)\pi = (K-I)\pi - k$. L'idée est alors de faire apparaître l'inverse de $L - I$, comme dans le cas linéaire; cet inverse est bien défini, des séries $\sum_{n\geqslant 2} a_n/\xi^n$ vers les séries $\sum_{n\geqslant 1} b_n/\xi^n$.

L'équation précédente a, dans les séries formelles, une solution unique

$$\pi = -\sum_{n\geqslant 0} [(L-I)^{-1}(K-I)]^n (L-I)^{-1}k .$$

[$(L-I)^{-1}$ augmente de 1 les degrés en ξ, et $(K-I)$ les diminue de 3, donc la série est bien formellement convergente].

On applique alors la transformation de Borel à la formule précédente: $(L-I)^{-1}$ devient la division par (e^x-1), et K la composition-convolution avec $(\xi+k)_B$. On arrive alors aux résultats cherchés par un calcul de majoration.

D'après le théorème (I.6.10) la transformée de Borel ψ_B de l'itérateur inverse vérifiera alors aussi $\psi_B \in \delta' + \mathscr{C}(2\pi i\mathbf{Z})$. Les hyperfonctions ψ_B et φ_B vérifient des « relations de résurgence » remarquables qu'on va maintenant établir.

Partons de la formule $g \circ \psi = \psi \circ g_0 = \psi(\xi+1)$; en passant aux transformées de Borel, on trouve

$$g_B \circledast \psi_B = \psi_B \circledast g_{0,B} ;$$

posant $\omega = 2\pi i n$, $(n \in \mathbf{Z}-\{0\})$, on a

$$\Delta_\omega g_B = \Delta_\omega g_{0,B} = 0 ;$$

d'autre part:

$$g_{0,B} = \delta' + \delta ,$$

d'où:

$$\exp_* \omega(g_{0,B}-\delta') = \exp_*(-\omega\delta) = e^{2\pi i n}\delta = \delta ;$$

en utilisant (I.6.9), on trouve alors:

$$(\partial g_B \circledast \psi_B) * \Delta_\omega \psi_B = \Delta_\omega \psi_B \circledast g_{0,B} .$$

Posons $\mathscr{L}(\Delta_\omega \psi_B) = \Delta_\omega \psi$; d'après le théorème précédent, on est dans le cas d'application de la transformation de Laplace considérée au chapitre I, et l'on a:

$$\Delta_\omega \psi = \sum_{n\leqslant 0} c_n \xi^n , \qquad c_n \in \mathbf{C} ;$$

on aura:

$$\left(\left(\frac{d}{d\xi} g\right) \circ \psi\right) \Delta_\omega \psi = (\Delta_\omega \psi)(\xi+1) .$$

D'autre part, en dérivant l'équation $g \circ \psi = \psi(\xi+1)$, on trouve

$$\left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{d\psi}{d\xi}(\xi+1).$$

Maintenant, il est facile de voir que l'équation $\left(\frac{dg}{d\xi} \circ \psi\right) \eta = \eta(\xi+1)$ n'a qu'une solution formelle de la forme $\sum_{n \leqslant 0} c_n \xi^n$, à un facteur constant près. On trouve donc la relation

$$\text{(II.3.3)} \qquad \Delta_\omega \psi = A_\omega \frac{d\psi}{d\xi}, \quad \text{ou} \quad \Delta_\omega \psi_B = A_\omega \partial \psi_B, \quad A_\omega \in \mathbf{C}.$$

Maintenant, en utilisant la relation $\psi \circ \varphi = \xi$, ou $\psi_B \circledast \varphi_B = \delta'$, et la formule (I.6.9), on trouve facilement qu'on a:

$$\text{(II.3.4)} \qquad \Delta_\omega \varphi_B = -A_\omega \exp_*(-\omega(\varphi_B - \delta')),$$

ce qu'il est commode d'écrire

$$\Delta_\omega \varphi = -A_\omega e^{-\omega(\varphi - \xi)}.$$

Soit maintenant g' un autre élément de G, formellement conjugué à g_0, et soient φ', ψ', (resp. A'_ω) les itérateurs (resp. les invariants) qui lui correspondent.

La version « résurgente » du théorème (II.2.3), assertion 1, est alors la suivante.

THÉORÈME (II.3.5). *Pour que g et g' soient analytiquement conjugués, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$: $A_{2\pi i n} = A'_{2\pi i n}$.*

Soit h la série formelle à l'infini définie par $\varphi = \varphi' \circ h$; on a $g' = h \circ g \circ h^{-1}$, et d'après les résultats qui précèdent h est transformé de Laplace d'un certain $h_B \in \delta' + \mathscr{C}(2\pi i \mathbf{Z})$, vérifiant $\varphi_B = h_B \circledast \varphi_B$. Pour simplifier les notations, on continuera à se permettre d'écrire les dérivations étrangères du côté « fonctions de ξ ». On a:

$$-A_\omega e^{-\omega(\varphi - \xi)} = \Delta_\omega \varphi = \left(\frac{d\varphi'}{d\xi} \circ h\right) \Delta_\omega h + e^{-\omega(h-\xi)} (\Delta_\omega \varphi') \circ h$$

le dernier terme vaut

$$-A'_\omega e^{-\omega(h-\xi) - \omega(\varphi' - \xi) \circ h} = -A'_\omega e^{-\omega(\varphi - \xi)}.$$

Alors:

1) si h est convergent, i.e. si g et g' sont analytiquement conjugués, h_B est entière, donc $\Delta_\omega h = 0$ et $A_\omega = A'_\omega$.

2) Réciproquement, si $A_\omega = A'_\omega$ pour tout ω, on a $\Delta_\omega h = 0$; on en déduit facilement que h_B est entière. On montre alors, par des majorations qui se font en même temps que celles du théorème (II.3.2) que h_B est de type exponentiel; (voir [E 2], p. 321 et suivantes); donc h est convergent et g' est conjugué à g.

Pour terminer, indiquons rapidement le lien entre les deux séries d'invariants trouvés aux n°s 2 et 3. Tout d'abord on déduit de la formule (II.3.4) qu'il existe des $A^+_\omega \in \mathbf{C}$ tels qu'on ait $\Delta^+_\omega \varphi = -A^+_\omega e^{-\omega(\varphi-\xi)}$; de plus, les A^+_ω s'expriment par des polynômes universels (qu'on pourrait expliciter) dans les A_ω, et réciproquement. On utilise pour cela la formule (I.6.1) et son « inverse » $\exp(\Sigma\Delta_n t^n) = \mathrm{id} + \Sigma\Delta^+_n t^n$.

Soient alors $\{\chi_n\}$ les invariants (II.2.2). On a le résultat suivant.

PROPOSITION (II.3.6). *Pour* $n > 0$, *on a* $A^+_{2\pi i n} = \chi_{-n}$.

Je me limiterai à un argument heuristique; soit γ_θ la demi-droite $e^{i\theta}[0, +\infty[$ orientée de manière à avoir 0 pour origine. On doit avoir, en un sens convenable,

$$\text{(II.3.7)} \qquad \int_{\gamma_\theta} \varphi_B(x) e^{-x\xi} dx = \varphi_+ \quad \text{si} \quad |\arg\theta| < \frac{\pi}{2}$$
$$= \varphi_- \quad \text{si} \quad |\pi - \arg\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

On regarde alors ce qui se passe lorsque θ traverse la valeur $\frac{\pi}{2}$ (cf. la démonstration de (I.5.5)); formellement, pour

$$\operatorname{Im}\xi \ll 0, \; -\pi + \varepsilon < \arg\xi < -\varepsilon,$$

on a

$$\varphi_+ - \varphi_- = \Sigma \int_{\gamma_n} \Delta^+_{2\pi i n} \varphi_B(x) e^{-x\xi - 2\pi i n \xi} d\xi,$$

γ_n étant le translaté par $2\pi i n$ de $\gamma_\theta \left(\theta = \frac{\pi}{2} + 0\right)$

d'où
$$\varphi_+ - \varphi_- = \sum_{n>0} A^+_{2\pi i n} e^{-2\pi i n \varphi_-}$$

en comparant avec (II.2.3), on « obtient » le résultat cherché; je laisse le lecteur regarder les modifications à faire pour $n < 0$.

Dans [E 2], p. 417 et suivantes, le lecteur trouvera une démonstration de cette proposition par un argument voisin de celui qui est esquissé ici; le point-clef est une majoration à l'infini de var φ_B, à laquelle j'ai déjà fait allusion; ceci permet entre autres d'établir (II.3.7) (bien entendu, au voisinage de 0, l'intégrale doit être interprétée au sens des distributions, comme on l'a fait au chapitre I).

Remarque (II.3.8). Dans la démarche précédente, on retrouve les $\varphi_\pm$, donc les résultats du n° 2 (méthode sectorielle) par la méthode résurgente du n° 3.

Sans que j'aie vérifié les détails, il me semble qu'une utilisation plus systématique de la sommabilité de Borel permettrait inversement de retrouver les résultats du n° 3, en particulier le théorème (II.3.1) à partir du n° 2, et plus précisément de la formule $\varphi_+ - \varphi_- = \Sigma\chi_n e^{2\pi i n\varphi_-}$. A mon avis, ceci ne diminue pas l'intérêt de principe qui s'attache à l'utilisation directe de la convolution et de la méthode résurgente: outre son élégance, et son caractère direct, cette méthode a aussi l'avantage de donner des résultats dans d'autres applications dont je n'ai pas parlé, par exemple dans des cas où l'on trouve pour Ω un réseau; dans un tel cas, une méthode de type sectoriel semble difficile à appliquer.

BIBLIOGRAPHIE

[D] DELIGNE, P. In SGA 7.2, Exposés n°s 13 et 14. *Springer Lect. Notes n° 340*, pp. 82-164.

[E] ECALLE, J. *Théorie des invariants holomorphes.* Publ. Math. Orsay n° 67 — 7409 (1974).

[Ei] —— Les fonctions résurgentes et leurs applications, Tome i.
$i = 1, 2$ Publications mathématiques d'Orsay n°s 81-05/06, 1981;
$i = 3$ à paraître prochainement;
$i \geqslant 4$ en préparation.

[K] KIMURA, T. On the iteration of analytic functions. *Funk. Eqvacioj 14-3* (1971), 197-238.