D) MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Si $f(x) \neq \nu$, le caractère $\xi \mapsto \psi(<\xi, f(x)-\nu>)$ n'est pas trivial sur le groupe $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ et son intégrale est nulle.

Si $f(x) = \nu$, ce caractère est trivial et comme $\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} d\xi = 1$, puisque les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ sont choisies pour qu'il en soit ainsi! On obtient l'importante égalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n \\ f(x)=\nu}} \varphi_\infty(x)$$

(la somme $\sum$ du second membre ne porte que sur les $x \in \mathbf{Z}^n$ car $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$ pour tout p, de plus cette somme représente à peu près le nombre de solutions entières du système $f = \nu$, présentes dans la boîte $P\mathscr{B} \subset \mathbf{R}^n$).

On cherche principalement, dans le présent travail, à comparer la somme $H(\xi)$ avec l'intégrale de même forme, appelée transformée de Gauss globale (en fait associée au système f, au caractère ψ et à la fonction φ)

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)dx\,.$$

On veut obtenir la formule asymptotique suivante: il existe $\delta > 0$, tel que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \int_{\mathbf{A}^r} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi + O(P^{n-rd-\delta})$$

Remarque. L'intégrale portant sur F^* est la seule raisonnable car cette fonction n'est pas en général constante sur les classes modulo $\mathbf{Q}$. De plus cette intégrale n'est autre, selon les notations d'Igusa (cf. bibliographie) que $\widehat{F^*}(-\nu) = F(\nu)$ appelée série singulière globale (cf. le paragraphe 5F). Le chapeau $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier associée au caractère de Tate (cf. Godement...).

D) Méthode du cercle adélique

Soit $\xi \in \mathbf{A}^r$; on utilisera désormais les notations suivantes

$$|\xi_\infty| = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq r} |\xi_{i,\infty}| \quad \text{et, pour tout } p, \quad |\xi_p|_p = \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq r} |\xi_{i,p}|_p;$$

on définit aussi la fonction

$$Q(\xi) = \prod_p \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p)$$

qui jouera un rôle important et dont on peut remarquer qu'elle ne dépend que des places finies p de ξ mais pas de ξ_∞.

Enfin on définit, pour chaque $\Delta > 0$, *un arc majeur* (noter l'emploi du singulier)

$$M(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r / |\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta\}.$$

Remarque.

a) Pour Δ suffisamment petit (ceci sera précisé en temps voulu) l'application canonique $\mathbf{A}^r \to (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$, que nous désignerons désormais par la lettre π, est *injective* sur $M(\Delta)$. Dans ces conditions, on notera de la même façon $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$ en remarquant que les mesures de Haar sur $\mathbf{A}^r$ et sur $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ attribuent respectivement la même valeur aux ensembles $M(\Delta)$ et $\pi(M(\Delta))$.

b) Ainsi le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la méthode classique a pour analogue adélique le quotient *compact* $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et les nombreux arcs majeurs classiques associés à un même $\Delta > 0$, trouvent leur analogue adélique dans un unique ensemble $M(\Delta)$ (ou $\pi(M(\Delta))$ si on préfère). Cette présentation de l'arc majeur adélique est due à Lachaud (cf. bibliographie).

Au paragraphe 1, au moyen d'une formule de Poisson, on compare, pour $\xi \in M(\Delta)$, la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 1. *Pour* Δ *suffisamment petit, il existe* $\delta_1 > 0$ *tel que*

$$\int_{M(\Delta)} (H(\xi) - F^*(\xi))\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_1}).$$

Au paragraphe 2, on majore la somme $H(\xi)$ sur l'arc mineur adélique $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))$, obtenant le

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2) *et pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}).$$

Au paragraphe 3, on majore l'intégrale $F^*(\xi)$ sur $\mathbf{A}^r - M(\Delta)$ pour démontrer le

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *il existe* $\delta_3 > 0$ *tel que*

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Remarque. Une conséquence du théorème 3 est que $F^* \in L^1(\mathbf{A}^r)$.

Ces trois théorèmes permettent d'obtenir la formule asymptotique désirée.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = \nu}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-\nu) + O(P^{n-rd-\delta}).$$

Au paragraphe 4, on utilise les hypothèses (H3) et (H4) pour rendre effective la formule asymptotique précédente. On démontre ainsi le

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, on a*

$$\widehat{F^*}(-\nu) \gg P^{n-rd}.$$

Il résulte de tout ceci le

THÉORÈME PRINCIPAL. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4) *le système diophantien* $f = \nu$ *admet une infinité de solutions entières.*

Un corollaire évident de ce Théorème Principal, pour $\nu = 0$, énonce qu'*un système* f *répondant aux hypothèses* (H1) *et* (H2) *observe le Principe de Hasse fin.*

Enfin le paragraphe 5, on l'a déjà compris, est consacré à des explications complémentaires et à des exemples suivant les travaux de Birch, Davenport et W. M. Schmidt; mais on ne trouvera dans ce paragraphe aucune démonstration à l'opposé des paragraphes 1 à 4 où on s'est efforcé d'être le plus complet possible.

§ 1. ARC MAJEUR

Le but de ce paragraphe est une bonne majoration de la différence entre la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$ lorsque ξ appartient à un arc majeur $M(\Delta)$.