§ 1. Arc majeur

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1985)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *il existe* $\delta_3 > 0$ *tel que*

$$\int_{\mathbf{A}^r - M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = O(P^{n-rd-\delta_3}).$$

Remarque. Une conséquence du théorème 3 est que $F^* \in L^1(\mathbf{A}^r)$.

Ces trois théorèmes permettent d'obtenir la formule asymptotique désirée.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ f(x) = \nu}} \varphi_\infty(x) = \widehat{F^*}(-\nu) + O(P^{n-rd-\delta}).$$

Au paragraphe 4, on utilise les hypothèses (H3) et (H4) pour rendre effective la formule asymptotique précédente. On démontre ainsi le

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4), *pour* $\mathscr{B}$ *et* P *convenablement choisis, on a*

$$\widehat{F^*}(-\nu) \gg P^{n-rd}.$$

Il résulte de tout ceci le

THÉORÈME PRINCIPAL. *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3) *et* (H4) *le système diophantien* $f = \nu$ *admet une infinité de solutions entières.*

Un corollaire évident de ce Théorème Principal, pour $\nu = 0$, énonce qu'*un système* f *répondant aux hypothèses* (H1) *et* (H2) *observe le Principe de Hasse fin.*

Enfin le paragraphe 5, on l'a déjà compris, est consacré à des explications complémentaires et à des exemples suivant les travaux de Birch, Davenport et W. M. Schmidt; mais on ne trouvera dans ce paragraphe aucune démonstration à l'opposé des paragraphes 1 à 4 où on s'est efforcé d'être le plus complet possible.

§ 1. ARC MAJEUR

Le but de ce paragraphe est une bonne majoration de la différence entre la somme $H(\xi)$ et l'intégrale $F^*(\xi)$ lorsque ξ appartient à un arc majeur $M(\Delta)$.

Pour cela on utilise la formule de Poisson (1.1) généralisant ainsi la démonstration de Lachaud dans son théorème 2.9.

Les lemmes 1.1, 1.2 et 1.3 concernent les places finies, ne font appel qu'à l'hypothèse (H1) et obtiennent une majoration intermédiaire qui dépend essentiellement de la place infinie.

Cette dernière est l'objet, au cours des lemmes 1.4, 1.5 et surtout 1.6, d'une démonstration particulièrement technique, c'est-à-dire réservée au lecteur courageux, mais qui utilise seulement l'appartenance de ξ à un arc majeur. On obtient ainsi une majoration suffisamment bonne pour la démonstration du théorème 1 qui termine ce paragraphe.

Soit l'application h qui, à tout élément x de $\mathbf{A}^n$, associe le nombre complexe

$$h(x) = \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>).$$

L'application h dépend du paramètre $\xi \in \mathbf{A}^r$, mais, par commodité, celui-ci n'est pas écrit. Comme h est une application de Schwarz-Bruhat, la formule de Poisson suivante est vraie:

$$\sum_{x\in\mathbf{Q}^n} h(x) = \sum_{y\in\mathbf{Q}^n} \hat{h}(y) \tag{1.1}$$

où

$$\hat{h}(y) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi[<\xi, f(x)> + <x, y>]dx.$$

Pour une justification de cette formule de Poisson on peut se référer à: Godement, « Adèles et idèles » cours I.H.P.

Puisque les fonctions φ et ψ sont décomposables, il en est de même de h et de $\hat{h}$, ainsi $\hat{h}(y) = \hat{h}_\infty(y_\infty)\prod_p \hat{h}_p(y_p)$, où « $\prod_p$ » désigne le produit sur toutes les places finies.

LEMME 1.1. *Posant* $q = \mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)$, *on a*

$$\hat{h}_p(y_p) = q^{-n} \sum_{u\in(\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p)^n} \psi_p(<\xi_p, f(u)> + <y_p, u>) \quad si \quad y_p \in q^{-1}\mathbf{Z}_p^n, \tag{1.2}$$

$$= 0 \quad si \quad y_p \notin q^{-1}\mathbf{Z}_p^n. \tag{1.3}$$

Démonstration. Puisque $\varphi_p(x_p) = 1_{\mathbf{Z}_p^n}(x_p)$, on a

$$\hat{h}_p(x_p) = \int_{\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<\xi_p, f(x_p)> + <x_p, y_p>)dx_p$$

$$= \sum_u \int_{u+q\,\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<\xi_p, f(x_p)> + <x_p, y_p>)dx_p$$

avec u décrivant un système de représentants de $(\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p)^n$.

Mais la fonction qui, à x_p, associe $\psi_p(<\xi_p, f(x_p)>)$ est constante sur les classes modulo $q\,\mathbf{Z}_p^n$. Car, en prenant v élément de $\mathbf{Z}_p^n$, on a

$$<\xi_p, f(x_p+qv)-f(x_p)> = \sum_{i=1}^{i=r} \xi_{i,p}(f_i(x_p+qv)-f_i(x_p))$$

et par la formule de Taylor,

$$f_i(x_p+qv)-f_i(x_p) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_p)\, qv_j + \ldots$$

Or $x_p \in \mathbf{Z}_p^n$, $v \in \mathbf{Z}_p^n$ et toutes les dérivées (même divisées par $|k|!$, où $|k|$ désigne, selon l'usage, la somme des ordres des dérivations partielles selon les x_j) sont des polynômes à coefficients entiers. De plus, q est présent avec un exposant au moins égal à un dans chaque terme de la formule de Taylor; donc $f_i(x_p+qv) - f_i(x_p) \in q\,\mathbf{Z}_p$ et, compte tenu de la définition de q, on a

$$<\xi_p, f(x_p+qv)-f(x_p)> \in \mathbf{Z}_p$$

et donc

$$\psi_p(<\xi_p, f(x_p+qv)>) = \psi_p(<\xi_p, f(x_p)>)$$

puisque le caractère ψ_p est trivial sur $\mathbf{Z}_p$. Ainsi,

$$\hat{h}_p(y_p) = \sum_u \psi_p(<\xi_p, f(u)>) \int_{u+q\,\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<x_p, y_p>)dx_p$$

$$= \sum_u \psi_p(<\xi_p, f(u)> + <y_p, u>) \int_{q\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<x_p, y_p>)dx_p$$

car dx_p est une mesure de Haar. Enfin

$$\int_{q\,\mathbf{Z}_p^n} \psi_p(<x_p, y_p>)dx_p = q^{-n} \quad \text{si} \quad y_p \in q^{-1}\mathbf{Z}_p^n,$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad y_p \notin q^{-1}\mathbf{Z}_p^n,$$

puisqu'il s'agit de l'intégrale, pour une mesure de Haar, d'un caractère sur un sous-groupe de $\mathbf{Q}_p^n$. On obtient ainsi le résultat annoncé pour $\hat{h}_p(y_p)$. □

LEMME 1.2. *Sous l'hypothèse* (H1) *on a*

$$|\hat{h}_p(y_p)| \ll \varphi_p(q\, y_p) q^{-\Omega+\varepsilon}. \tag{1.4}$$

Démonstration. Rappelons que $q = \mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)$.

Soit $y_p \notin q^{-1}\mathbf{Z}_p^n$, comme $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, on a: $\varphi_p(qy_p) = 0$. Mais, d'après l'égalité (1.3), on a aussi $\hat{h}_p(y_p) = 0$ donc l'inégalité (1.4) est vraie dans ce cas.

Soit $y_p \in q^{-1}\mathbf{Z}_p^n$, il vient $\varphi_p(qy_p) = 1$. En utilisant l'égalité (1.2) et l'isomorphisme bien connu entre $\mathbf{Z}_p/q\mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on obtient

$$\hat{h}_p(y_p) = q^{-n} \sum_{u \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^n} \psi_p(<\xi_p, f(u)> + <y_p, u>). \tag{1.5}$$

On peut ici remplacer ξ_p par tout élément de sa classe modulo $\mathbf{Z}_p^r$ et, en particulier, chaque $\xi_{i,p}$ peut être remplacé par sa partie polaire, dans son développement hensélien qui est de la forme $\dfrac{a_i}{q}$ avec pgcd $(a_1, ..., a_r, q) = 1$ puisque $q = \underset{1 \leqslant i \leqslant r}{\mathrm{Max}}\,(1, |\xi_{i,p}|_p)$.

En désignant par $\mathscr{B}_0$ la boîte unité usuelle de $\mathbf{R}^n$, l'identité (1.5) devient

$$\hat{h}_p(y_p) = q^{-n} \sum_{u \in q\mathscr{B}_0 \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{q} f_j(u) + <y_p, u>\right)\right]. \tag{1.6}$$

On reconnaît une somme $S(\alpha)$, au sens du paragraphe B de l'introduction, en prenant $\mathscr{B} = \mathscr{B}_0$, $P = q$, $\alpha = \left(\dfrac{a_i}{q}\right)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et $g(u) = <y_p, u>$ avec $d^\circ g = 1 < d$; cette dernière condition, concernant g, a été précisée au moment de la définition des sommes $S(\alpha)$; on trouvera l'explication de son existence au paragraphe 5A).

Un point important est que la majoration qui va suivre *ne dépend pas* des coefficients de g; elle est donc uniforme en y_p.

Les inégalités du cas ii) de l'hypothèse (H1) sont ici

$$|q'a_i - a_i' q| \leqslant q^{1-d+\Delta} \quad (1 \leqslant i \leqslant r) \quad \text{et} \quad 1 \leqslant q' \leqslant q^{\Delta},$$

elles sont insolubles pour $\Delta < 1$. En effet, dans ce cas et puisque $d \geqslant 2$ on a $1 - d + \Delta < 0$ d'où $q'a_i - a_i' q = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ (comment être entier et de valeur absolue < 1?).

On aurait donc $\frac{a_i}{q} = \frac{a'_i}{q'}$ mais aussi $q' < q$ ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(a_1, ..., a_r, q) = 1$; donc le cas ii) est impossible et on se trouve dans le cas i) de l'hypothèse (H1). Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $0 < \Delta < 1$, on a

$$| \hat{h}_p(y_p) | \ll q^{-\Delta\Omega+\varepsilon}.$$

D'où le meilleur résultat qui puisse s'en déduire

$$| \hat{h}_p(y_p) | \ll q^{-\Omega+\varepsilon}.$$

L'inégalité (1.4) est donc vraie pour toutes les valeurs de y_p. □

La fonction $Q(\xi) = \prod_p \mathrm{Max}(1, | \xi_p |_p)$ a déjà été définie au paragraphe D de l'introduction. Il ne s'agit pas vraiment d'un produit infini puisque, pour tout ξ élément de $\mathbf{A}^r$, les facteurs différents de un sont en nombre fini.

Cette fonction interviendra souvent dans ce travail. Il a déjà été dit dans l'introduction, mais il est bon de le rappeler, qu'elle ne dépend pas de ξ_∞.

Remarque. Pour tout entier premier p_0, on a

$$Q(\xi) = \mathrm{Max}(1, | \xi_{p_0} |_{p_0}) \prod_{p \neq p_0} \mathrm{Max}(1, | \xi_p |_p)$$

mais, pour tout $p \neq p_0$, la quantité $\mathrm{Max}(1, | \xi_p |_p)$, qui est une puissance de p, est une unité p_0-adique. Donc, puisque $\varphi_{p_0} = 1_{\mathbf{Z}^n_{p_0}}$, on peut écrire

$$\varphi_{p_0}(Q(\xi)y_{p_0}) = \varphi_{p_0}(y_{p_0} \mathrm{Max}(1, | \xi_{p_0} |_{p_0})). \tag{1.7}$$

LEMME 1.3. *Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse* (H1), *on a, pour tout* $\xi \in \mathbf{A}^r$, *l'inégalité*

$$| H(\xi) - F^*(\xi) | \ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} | \hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z) |.$$

Démonstration. On a, par définition de la fonction F^*:

$$F^*(\xi) = \int_{\mathbf{A}^n} \varphi(x)\psi(<\xi, f(x)>)dx = \hat{h}(0)$$

donc, en utilisant la formule de Poisson (1.1), on trouve que

$$H(\xi) - F^*(\xi) = \sum_{\substack{y \in \mathbf{Q}^n \\ y \neq 0}} \hat{h}_\infty(y_\infty) \prod_p \hat{h}_p(y_p).$$

Avec l'inégalité (1.4) du lemme 1.2 et l'égalité (1.7) de la remarque ci-dessus, il vient

$$(1.8) \qquad | H(\xi) - F^*(\xi) | \ll \sum_{\substack{y \in \mathbf{Q}^n \\ y \neq 0}} | \hat{h}_\infty(y) | \prod_p \varphi_p(Q(\xi) y_p) Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} .$$

Bien sûr la fonction $Q(\xi)$ ne dépend ni de l'indice p, ni de $y \in \mathbf{Q}^n - \{0\}$; de plus, à cause du produit $\prod_p \varphi_p(Q(\xi) y_p)$ et de l'égalité $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, la somme (1.8) peut se réduire aux y tels que $Q(\xi) y \in \mathbf{Z}^n$. On obtient donc

$$(1.9) \qquad | H(\xi) - F^*(\xi) | \ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} | \hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1} z) | . \qquad \square$$

Il faut désormais majorer la somme présente dans le membre de droite de l'inégalité (1.9) et qui ne concerne que la place infinie. C'est l'objet des lemmes 1.4, 1.5 et 1.6 qui suivent.

Soit u une fonction de Schwartz sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout t élément de $[0, 1]^n$, nous noterons u^* la fonction définie par

$$u^*(t) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} u(x+t) .$$

LEMME 1.4. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^n} | \hat{u}(y) |^2 = \int_{[0,1]^n} | u^*(t) |^2 dt .$$

Démonstration. Appliquons à la fonction u^* l'égalité de Parseval-Bessel; on trouve

$$\int_{[0,1]^n} | u^*(t) |^2 dt = \sum_{p \in \mathbf{Z}^n} | u_p^* |^2$$

où

$$u_p^* = \int_{[0,1]^n} u^*(t) e^{2i\pi < p, t >} dt$$

est le coefficient de Fourier d'indice p de la fonction u^*; par suite

$$u_p^* = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} \int_{[0,1]^n} u(x+t) e^{2i\pi < p, t >} dt ,$$

car l'interversion de la sommation et de l'intégration est justifiée puisque u est une fonction de Schwartz. Posons $z = x + t$; il vient

$$u_p^* = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} e^{-2i\pi < p, x >} \int_{x+[0,1]^n} u(z) e^{2i\pi < p, z >} dz ;$$

mais si $< p, x > \in \mathbf{Z}$, on a $e^{-2i\pi < p, x >} = 1$, d'où

$$u_p^* = \int_{\mathbf{R}^n} u(z) e^{2i\pi < p, z >} dz = \hat{u}(-p)$$

et finalement

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^n} | \hat{u}(y) |^2 = \int_{[0,1]^n} | u^*(t) |^2 dt . \qquad \square$$

Soit maintenant $P_0(D)$ l'opérateur différentiel associé au polynôme homogène en n variables, de degré $k = 2s$

$$P_0(x_1, ..., x_n) = (x_1^2 + ... + x_n^2)^s .$$

Selon l'habitude, le symbole $[\alpha]$ désignera la partie entière du réel α.

LEMME 1.5. *Avec les notations précédentes et pour* $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, *on a l'inégalité*

$$\sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^n \\ y \neq 0}} | \hat{u}(y) | \ll \left[\int_{[0,1]^n} | (P_0(D)u)^*(t) |^2 \, dt \right]^{1/2}$$

la constante impliquée par le symbole « $\ll$ » dépendant seulement de k *et donc de* n.

Démonstration. Une propriété classique de la transformation de Fourier s'écrit

$$(P_0(D)u)^\wedge(z) = P_0(2i\pi z)\hat{u}(z) = (2i\pi)^k P_0(z)\hat{u}(z) .$$

Appliquant le lemme 1.4 à la fonction de Schwartz $(P_0(D)u)$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} | (P_0(D)u)^*(t) |^2 dt &= \sum_{y \in \mathbf{Z}^n} | (P_0(D)u)(y) |^2 \\ &= (2\pi)^{2k} \sum_{y \in \mathbf{Z}^n} | P_0(y)\hat{u}(y) |^2 . \end{aligned}$$

Pour que la série $\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} \frac{1}{|P_0(y)|^2}$ soit convergente, il faut que l'on ait $2k \geqslant n+1$, ce qui, pour k entier, est obtenu lorsque $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$; mais on sait que k est un entier pair d'où la condition, valable pour tout n,

$$k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 2 .$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux séries de carré sommable, $\sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}^n\\ z\neq 0}} |P_0(z)\hat{u}(z)|$ et $\sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}^n\\ z\neq 0}} \frac{1}{|P_0(z)|}$. On trouve

$$\left[\sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}^n\\ z\neq 0}} |\hat{u}(z)|\right]^2 \ll \left[\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2\right]\left[\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} \frac{1}{|P_0(y)|^2}\right].$$

Comme $P_0(0) = 0$, on a $\sum_{y\in\mathbf{Z}^n} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2 = \sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} |P_0(y)\hat{u}(y)|^2$ et donc

$$\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} |\hat{u}(y)| \ll \left[\int_{[0,1]^n} |(P_0(D)u)^*(t)|^2\, dt\right]^{1/2} .$$

La constante impliquée dans le symbole « $\ll$ » provient de $(2\pi)^{2k}$ et de $\sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} \frac{1}{|P_0(y)|^2}$, et dépend donc seulement de k (donc de n) et de P_0.

Comme on peut toujours multiplier P_0 par un coefficient arbitraire, le symbole « $\ll$ » pourrait même être remplacé par « $<$ » pour des polynômes P_0 convenables. □

Remarque. Les lemmes 1.4 et 1.5 constituent la généralisation à n variables du lemme 2.11 de Lachaud.

COROLLAIRE. *Soit le réel* $a \geqslant 1$, *soit la fonction* $v(x) = u(ax)$; *alors avec les conditions du lemme 1.5, on a*

$$\frac{1}{a^n} \sum_{\substack{y\in\mathbf{Z}^n\\ y\neq 0}} |\hat{u}(y/a)| \ll \left[\int_{[0,1]^n} |(P_0(D)v)^*(t)|^2\, dt\right]^{1/2} . \tag{1.10}$$

Démonstration. On a

$$\hat{v}(y) = \frac{1}{a^n}\,\hat{u}\left(\frac{y}{a}\right)$$

et l'inégalité (1.10) s'obtient en appliquant le lemme 1.5 à la fonction v. □

Reprenons, au lieu de la fonction u des deux lemmes précédents, la fonction $h_\infty(x) = \varphi_\infty(x)\exp^{-2i\pi<\xi_\infty, f(x)>}$; rappelons que $\varphi_\infty = \theta * 1_{PB}$ (produit de convolution) avec θ, fonction C^∞ à support compact aussi petit que le besoin s'en fera sentir et voisinage de 0. De plus, nous imposerons $\theta \geqslant 0$ et, par commodité, θ paire.

Comme $1_{P\mathscr{B}}$ est la fonction caractéristique de la boîte $P\mathscr{B}$, la fonction φ_∞ apparaît comme un « adoucissement » C^∞ des discontinuités évidentes de $1_{P\mathscr{B}}$.

On notera, comme dans tout ce travail, $|\xi_\infty| = \sup_i |\xi_{i,\infty}|$. Enfin le lecteur doit distinguer le polynôme P_0 qui intervient dans les lemmes 1.4, 5 et 6 de la variable P qui figure dans tout ce travail.

LEMME 1.6. *Avec les notations précédentes et sous les conditions*

$$|\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \textit{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta \quad \textit{avec} \quad 0 < \Delta < 1\,. \tag{1.11}$$

On a

$$\sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}^n\\ z\neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)| \ll Q(\xi)^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}\,P^{n-1+\Delta}\,. \tag{1.12}$$

Démonstration. Sa longueur nous contraint à la scinder en une introduction, une partie A, une partie B et une conclusion.

Introduction. Soit la fonction $v(x) = h_\infty(ax) = u_0(x)v_0(x)$ produit des deux fonctions

$$u_0(x) = \exp(-2i\pi<\xi_\infty, f(ax)>)$$

et

$$v_0(x) = \varphi_\infty(ax)\,.$$

Pour étudier la fonction $P_0(D)\,(u_0v_0)$, on utilise la formule de Leibniz

$$P_0(D)\,(u_0v_0) = \sum_{|j|\leqslant k} (D^j u_0)\,(P_0^{(j)}(D)v_0)\,(j\,!)^{-1}\,, \tag{1.13}$$

dans laquelle les notations utilisées sont classiques: le multi-indice $j = (j_1, ..., j_n)$ est tel que $0 \leqslant |j| = j_1 + ... + j_n \leqslant k$ (rappelons que $k = d^\circ P_0$), $P_0^{(j)}$ désigne la dérivée $D^j P_0$ du polynôme P_0, $D^j u_0$ désigne la dérivée d'ordre j de la fonction u_0, enfin on a

$$j! = j_1! \dots j_n!;$$

on trouvera une justification de cette formule de Leibniz, par exemple, à la page 10 du livre d'Hörmander, « Linear partial differential operators » (Springer, 1962).

Le nombre de termes dans la somme du membre de droite de l'égalité (1.13) dépend seulement de k et donc de n puisqu'en définitive on posera $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$; ce nombre de termes est donc indépendant des variables a, ξ et P.

Il faut maintenant étudier chacun des termes de cette somme. Nous distinguerons le cas général où $j \neq 0$ (partie A) du cas particulier $j = 0$ (partie B).

Partie A. Cas $j \neq 0$.

La fonction $D^j u_0$ est une somme de termes qui sont de la forme $C(x)u_0(x)$, où $C(x)$ est un polynôme obtenu comme produit, pour des multi-indices *s non nuls*, de polynômes dérivés $D^s(-2i\pi < \xi_\infty, f(ax) >)$.

Pour mieux comprendre la phrase précédente, voici un exemple dans le cas $j = (2, 1, 0, ..., 0)$ obtenu en posant $w = -2i\pi < \xi_\infty, f(ax) >$:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} e^w = \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} e^w + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial w}{\partial x_2} e^w + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} e^w + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} e^w .$$

On y trouve cinq termes de la forme annoncée, on peut donc trouver plusieurs fois le même $C(x)$; le dernier terme écrit correspond aux multi-indices $s_1 = (1, 0, ... 0) = s_2$ et $s_3 = (0, 1, 0, ..., 0)$, on peut donc trouver plusieurs fois le même multi-indice s dans un polynôme $C(x)$.

Clairement le nombre de termes nécessaires pour écrire ainsi la fonction $D^j u_0$ dépend de j et, puisque $|j| \leqslant k$, ce nombre est borné indépendemment de a, ξ ou P. Enfin, le cas $j = 0$, et lui seul, échappe à ce qui vient d'être dit et c'est la raison de son exclusion.

L'expression $w = -2i\pi < \xi_\infty, f(ax) >$ est un polynôme homogène en x (de degré d), en a (de degré d), en ξ_∞ (de degré 1). Ainsi a-t-on l'inégalité

$$(1.14) \qquad | D^s(w) | \ll a^d \, | x |^{d-|s|} \, | \xi_\infty |$$

valable pour $1 \leqslant | s | \leqslant d$; pour $| s | > d$ on a bien sûr $D^s(w) = 0$ et la constante sous-entendue par l'inégalité (1.14) dépend des coefficients des formes f_i, du multi-indice s mais ne dépend pas de x, ξ, a ou P.

Comme nous étudierons la fonction $(D^j u_0 \, P_0^{(j)}(D) v_0)^*$ et comme $v_0(x) = \varphi_\infty(ax)$, on ne fera usage de l'inégalité (1.14) que pour des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que $| x | \ll \dfrac{P}{a}$, la constante impliquée par cette dernière inégalité dépendant de la fonction θ et de la boîte $\mathscr{B}$ mais non de x, ξ, a ou P. Plus précisément, il existe $\beta > 0$, dépendant de θ et de $\mathscr{B}$ tel que le support de la fonction φ_∞ soit inclus dans la boule de centre 0 et de rayon βP.

Donc pour tout t élément de $[0, 1]^n$ et pour tout x tel que

$$(1.15) \qquad | x | \geqslant \beta \frac{P}{a} + 1$$

on a

$$| x + t | \geqslant \beta \frac{P}{a}$$

et donc $(ax + at) \notin$ Support de φ_∞, et a fortiori $(ax + at) \notin$ Support de $P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty$; comme de plus

$$\left(P_0^{(j)}(D) v_0\right)(x) = a^{|j|} \left(P_0^{(j)}(D) \varphi_\infty\right)(ax)$$

on obtient pour tout $t \in [0, 1]^n$ et tout x vérifiant l'inégalité (1.15):

$$(1.16) \qquad \left(P_0^{(j)}(D) v_0\right)(x + t) = 0$$

Mais, et c'est un point essentiel de la démonstration, puisque $\Delta < 1$, on aura

$$a \leqslant P^\Delta < P$$

et $\dfrac{P}{a}$ est donc beaucoup plus grand que 1 dans les conditions du lemme.

En posant, par exemple, $\alpha = \beta + 1$ on constate que tout x tel que

$$| x | \geqslant \alpha \frac{P}{a}$$

satisfait à l'inégalité (1.15) et, par suite, à l'égalité (1.16).

Ainsi, pour $|x| \ll \frac{P}{a}$, l'inégalité (1.14) devient l'inégalité

$$|D^s(w)| \ll a^{|s|} P^{d-|s|} |\xi_\infty| .$$

Comme l'une des hypothèses du lemme est

$$|\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta}$$

on obtient

$$|D^s(w)| \ll a^{|s|} P^{-|s|+\Delta}$$

et donc

$$|C(x)\, e^{-2i\pi<\xi_\infty, f(ax)>}| \ll \prod_{\text{certains } s} a^{|s|} P^{-|s|+\Delta} . \tag{1.17}$$

Définissons la fonction

$$N(x) = \left(P_0^{(j)}(D)v_0\right)(x)\, C(x)u_0(x) .$$

En tenant compte de l'égalité (1.16), valable pour $|x| \gg \frac{P}{a}$, et de l'inégalité (1.17), il vient

$$|N^*(t)| \ll \left[\prod_{\text{certains } s} a^{|s|} P^{-|s|+\Delta}\right] \left[\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n \\ |x|\ll\frac{P}{a}}} \left|\left(P_0^{(j)}(D)v_0\right)(x+t)\right|\right]$$

$$\ll \left(\prod_s a^{|s|} P^{-|s|+\Delta}\right) a^{|j|} \left[\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}^n \\ |x|\ll\frac{P}{a}}} \left|\left(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty\right)(ax+at)\right|\right] \tag{1.18}$$

Dans cette dernière ligne, l'exposant total de la variable a est

$$|j| + \sum_{\text{certains } s} |s| = k$$

parce que le polynôme P_0 a été choisi homogène. De plus, la fonction $P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty$ est bornée, indépendemment de a, ξ ou P, comme le montre le calcul suivant

$$\left|\left(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty\right)(t)\right| = \left|P_0^{(j)}(D)\left[\int_{\mathbf{R}^n} \theta(t-x)1_{P\mathscr{B}}(x)dx\right]\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbf{R}^n} \left(P_0^{(j)}(D)\theta\right)(t-x)1_{P\mathscr{B}}(x)dx\right|$$

$$= \left| \int_{\mathbf{R}^n} \left(P_0^{(j)}(D)\theta\right)(x) 1_{P\mathscr{B}}(t-x)dx \right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \left| \left(P_0^{(j)}(D)\theta\right)(x) \right| dx .$$

Cette dernière intégrale existe puisque θ est C^∞ à support compact, sa valeur ne dépend ni de a, ni de ξ, ni de P.

Il en résulte que

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ |x| \ll P/a}} \left| \left(P_0^{(j)}(D)\varphi_\infty\right)(ax+at) \right| \ll \frac{P^n}{a^n}$$

la majoration obtenue étant une estimation classique (à une constante près !) du nombre de $x \in \mathbf{Z}^n$ et tels que $|x| \ll P/a$.

En reprenant l'inégalité (1.18), on obtient

$$|N^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n+\sum_s(\Delta-|s|)} .$$

Dans cette dernière inégalité, la somme qui figure dans l'exposant de la variable P comprend au moins un terme. Comme, de plus, on sait que $\Delta < 1$ et $|s| \geqslant 1$, on trouve que

$$\sum_s (\Delta - |s|) \leqslant -1 + \Delta$$

l'égalité pouvant avoir lieu, par exemple lorsque $|j| = 1$. Il s'ensuit que

$$|N^*(t)| \ll a^{k-n} P^{n-1+\Delta} . \tag{1.19}$$

Nous avions dit, au début de cette partie A, que la fonction $D^j u_0$ était une somme de termes de la forme $C(x)\, e^w$, le nombre de ces termes étant majoré indépendemment de a, ξ ou P. Il est aussi clair que l'application qui associe, à une fonction de Schwartz u, sa « périodisée » u^*, est une application linéaire. Dans ces conditions l'inégalité (1.19) devient, pour tout $j \neq 0$,

$$\left| \left(D^j u_0\, P^{(j)}(D) v_0\right)^*(t) \right| \ll a^{k-n} P^{n-1+\Delta} . \tag{1.20}$$

Partie B. Cas $j = 0$.

On a déjà dit que la démonstration de la partie A ne pouvait servir dans ce cas puisque celle-ci repose sur l'existence d'au moins une fonction dérivée $D^s(w)$, avec $|s| \geqslant 1$, en facteur de la fonction e^w.

On a tout d'abord, puisque $| D^0 u_0 | = | e^w | = 1$,

$$| (D^0 u_0 \, P_0(D) v_0)^*(t) | \leqslant \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} | (P_0(D) v_0)(x+t) |$$
$$\leqslant a^k \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} | (P_0(D) \varphi_\infty)(ax+at) | .$$

Comme le polynôme P_0 est homogène de degré $k \geqslant 1$, la fonction $P_0(D)\varphi_\infty$ est combinaison linéaire de dérivées de φ_∞, mais non de φ_∞ elle-même; or toutes ces fonctions dérivées sont nulles dans les domaines où φ_∞ est constante.

Soit H le tube dont la base est le bord de la boîte $P\mathscr{B}$ et dont l'épaisseur est $\leqslant 1$. Puisque nous savons que $\varphi_\infty = \theta * 1_{P\mathscr{B}}$ et que le support de la fonction θ est, par exemple, inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]^n$, il en résulte que la fonction φ_∞ est constante dans le complémentaire de H.

Il est clair que le volume de H est de l'ordre de la surface de la boîte $P\mathscr{B}$ c'est-à-dire que

$$\mathrm{vol}(H) \ll P^{n-1} ;$$

et le nombre d'éléments x de $\mathbf{Z}^n$, tels que $(ax+at) \in H$, est donc $\ll \dfrac{P^{n-1}}{a^n}$.

Il vient donc l'inégalité

$$| (D^0 u_0 \, P_0(D) v_0)^*(t) | \ll a^{k-n} P^{n-1} . \tag{1.21}$$

Conclusion: Reprenons la formule de Leibniz (1.13); grâce aux inégalités (1.20) et (1.21), on trouve

$$| (P_0(D) v)^*(t) | \ll a^{k-n} P^{n-1+\Delta}$$

avec, rappelons-le, $v(x) = h_\infty(ax)$.

En appliquant maintenant le corollaire du lemme 1.5, on obtient

$$\sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^n \\ y \neq 0}} | \hat{h}_\infty \left(\frac{y}{a}\right) | \ll a^k P^{n-1+\Delta} .$$

Prenant enfin $a = Q(\xi) \geqslant 1$ et $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, on obtient le résultat de ce lemme:

$$\sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}^n \\ z \neq 0}} | \hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1} z) | \ll Q(\xi)^{\left[\frac{n}{2}\right]+2} P^{n-1+\Delta} . \qquad \square$$

Remarque. Dans cette dernière majoration, on ne peut espérer mieux que $P^{n-1+\Delta}$ si ce n'est peut-être P^{n-1} ou $P^{n-1+\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$, de peu d'avantage puisque cette majoration sera utile dans le cas où Δ est très petit.

En effet, pour $\xi = 0$, on a

$$\hat{h}_\infty(y) = \hat{\varphi}_\infty(y) = \hat{\theta}(y)\,\hat{1}_{PB}(y)$$

avec

$$\hat{1}_{PB}(y) = \int_{P\mathscr{B}} e^{-2i\pi<x,y>}dx = \prod_{k=1}^{n} \int_{Pa_k}^{Pb_k} e^{-2i\pi x_k y_k}\,dx_k$$

si on a défini : $\mathscr{B} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

De plus, on a

$$\int_{Pa_k}^{Pb_k} e^{-2i\pi x_k y_k}\,dx_k = (2i\pi y_k)^{-1}\,[e^{-2i\pi y_k Pa_k} - e^{-2i\pi y_k Pb_k}], \quad \text{si} \quad y_k \neq 0$$

$$= P(b_k - a_k), \quad \text{si} \quad y_k = 0.$$

Donc, lorsque $P \to \infty$, les termes prépondérants dans la somme

$$\sum_{\substack{y \in \mathbf{Z}^n \\ y \neq 0}} |\,\hat{\theta}(y)\,|\;|\,\hat{1}_{PB}(y)\,|$$

sont clairement ceux tels que tous les y_k soient nuls sauf un et ces termes sont de l'ordre de P^{n-1}.

Au contraire, si on fait intervenir la variable a dans le précédent calcul et sous les conditions $1 \leqslant a \leqslant P^\Delta$ et $\Delta < 1$, on est conduit, les termes prépondérants restant les mêmes, à une estimation en (a Log a) qui indique la médiocrité du $a^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$ obtenu.

Heureusement cette puissance $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 2$ de la variable $a = Q(\xi)$, qui est donc probablement trop grande, n'aura aucune conséquence fâcheuse dans la suite de ce travail parce qu'il sera *toujours possible de prendre* Δ *aussi petit qu'on le désirera :* un coup de chance qui ne se retrouve pas dans d'autres applications de la méthode du cercle (Davenport dixit).

Au paragraphe D de l'introduction, nous avons défini, pour tout $\Delta > 0$, l'arc majeur

$$M(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r \mid |\,\xi_\infty\,| \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta\}.$$

LEMME 1.7. *Soit* π *la projection canonique de* $\mathbf{A}^r$ *sur* $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$; *alors, si* $\Delta < \frac{d}{3}$, *la restriction de* π *à l'arc majeur* $M(\Delta)$ *est injective pour* P *suffisamment grand.*

Démonstration. On a les propriétés suivantes de la fonction $Q(\xi)$:

$$Q(\xi+\xi') \leqslant Q(\xi)Q(\xi')$$

et

$$Q(-\xi) = Q(\xi).$$

Prenons ξ et ξ' dans $M(\Delta)$, il en résulte

$$Q(\xi-\xi') \leqslant Q(\xi)Q(\xi') \leqslant P^{2\Delta}$$

et

$$|\xi_\infty - \xi'_\infty| \leqslant |\xi_\infty| + |\xi'_\infty| \leqslant 2\,P^{-d+\Delta}.$$

De plus, une conséquence facile de la formule du produit pour les nombres rationnels non nuls est que, pour tout $z \in \mathbf{Q}^r - \{0\}$, on a

$$|z_\infty|\,Q(z) \geqslant 1.$$

Comme nous avons obtenu

$$|\xi_\infty - \xi'_\infty|\,Q(\xi-\xi') \leqslant 2\,P^{-d+3\Delta}$$

la conclusion s'impose pour $\Delta < \frac{d}{3}$ et $P > 2^{\frac{1}{d-3\Delta}}$. □

Remarque. Lorsque π est injective sur l'arc majeur $M(\Delta)$, les mesures de Haar $\mu(M(\Delta))$ et $\mu(\pi(M(\Delta)))$ sont égales.

Nous pouvons enfin démontrer le principal résultat de ce paragraphe 1:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2) *et pour*

$$\Delta < \left(\left[\frac{n}{2}\right] + r + 3\right)^{-1},$$

il existe $\delta_1 > 0$ *tel que, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *on ait*

$$\int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi = \int_{M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi + O(P^{n-rd-\delta_1}).$$

Démonstration. En utilisant le lemme 1.3, on obtient

$$\begin{aligned} | H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>) - F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>) | &= | H(\xi) - F(\xi) | \\ &\ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}^n \\ z\neq 0}} | \hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z) | ; \end{aligned}$$

puis, en vertu du lemme 1.6, pour $\xi \in M(\Delta)$ et $\Delta < 1$, il vient

$$\begin{aligned} | H(\xi) - F^*(\xi) | &\ll Q(\xi)^{-\Omega+s+\left[\frac{n}{2}\right]+2} P^{n-1+\Delta} \\ &\ll Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} P^{n-1+\Delta\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)} . \end{aligned}$$

En suivant le lemme 1.7 et la remarque qui le suit, nous obtenons, pour $\Delta < \dfrac{d}{3}$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi - \int_{M(\Delta)} F^*(\xi)\psi(<\xi, -\nu>)d\xi \right| \\ &\qquad \leqslant \int_{M(\Delta)} | H(\xi) - F^*(\xi) | \, d\xi \\ (1.22) \quad &\ll \left[\int_{|\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta}} P^{n-1+\Delta\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)} d\xi_\infty \right] \left[\int_{Q(\xi)\leqslant P^\Delta} Q(\xi)^{-\Omega+\varepsilon} \underset{p}{\otimes} d\xi p \right] . \end{aligned}$$

L'hypothèse (H2) a, pour principal avantage, d'assurer la convergence, quand $P \to \infty$, de la dernière intégrale puisque nous pouvons choisir ε tel que

$$0 < \varepsilon < \Omega - r - 1 .$$

Une démonstration de cette convergence est proposée au lemme 3.3 de ce travail.

Il reste donc l'expression

$$\begin{aligned} (1.23) \quad \int_{|\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta}} P^{n-1+\Delta\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)} d\xi_\infty &= P^{n-1+\Delta\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)} P^{-rd+r\Delta} \\ &= P^{n-rd-1+\Delta\left(\left[\frac{n}{2}\right]+r+3\right)} . \end{aligned}$$

Prenons donc

$$\Delta < \left(\left[\frac{n}{2}\right]+r+3\right)^{-1} < \inf\left(1, \frac{d}{3}\right) .$$

Posons

$$\delta_1 = 1 - \Delta\left(\left[\frac{n}{2}\right]+r+3\right) > 0\,;$$

alors l'expression (1.23) et, par suite, le membre de droite de l'inégalité (1.22) sont des

$$O(P^{n-rd-\delta_1})\,;$$

le Théorème est donc démontré. □

Remarque. Au lemme 1.2, on peut se passer de l'hypothèse (H1) et majorer trivialement le résultat du lemme 1.1, on obtient, avec $q = \mathrm{Max}(1, |\xi_p|_p)$:

$$|\hat{h}_p(y_p)| \leqslant \varphi_p(q\, y_p)\,. \tag{1.24}$$

Alors le lemme 1.3 nous donnerait seulement

$$|H(\xi) - F^*(\xi)| \ll \sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}^n\\ z\neq 0}} |\hat{h}_\infty(Q(\xi)^{-1}z)|\,. \tag{1.25}$$

Bien évidemment, les lemmes 1.4, 5 et 6 n'utilisent pas les hypothèses (H1) et (H2). Enfin on peut aussi abandonner l'hypothèse (H2) dans la démonstration du théorème 1, quitte à rendre Δ encore plus petit mais nous avons déjà dit que c'est sans importance sur le reste de ce travail. Le lecteur vérifiera facilement que l'hypothèse

$$\Delta < \left(\left[\frac{n}{2}\right]+2r+4\right)^{-1}$$

permet la démonstration du théorème 1 sans utiliser les hypothèses (H1) *et* (H2).

Ainsi, au paragraphe B de l'Introduction pourrait-on supprimer tout ce qui concerne le polynôme quelconque g de degré $< d$, simplifiant ainsi l'hypothèse (H1) sans rien modifier au résultat de ce travail.

Toutefois, comme l'explique le paragraphe 5A), l'hypothèse (H1) provient d'une méthode proposée par Weyl dont les résultats sont indépendants de tout polynôme g de degré $< d$ figurant dans l'expression des sommes $S(\alpha)$. Dans ces conditions, la simplification envisagée n'est qu'un succès à la Pyrrhus.