Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1985)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE DU CERCLE ADÉLIQUE ET PRINCIPE DE HASSE FIN POUR CERTAINS SYSTÈMES DE FORMES

Autor: Danset, Renaud

Kapitel: § 2. Arc Mineur

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 2. Arc Mineur

On entend ici par « Arc Mineur », le complémentaire dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$ de l'arc majeur $M(\Delta)$. On désire majorer le module de la somme $H(\xi)$ lorsque ξ appartient à un tel arc mineur.

Pour cela, l'hypothèse (H1) est indispensable. On définira d'ailleurs un ensemble $T(\Delta) \subset M(\Delta)$, mieux adapté à l'hypothèse (H1) et on obtiendra, au lemme 2.2 une majoration de $|H(\xi)|$ pour ξ appartenant au complémentaire de $T(\Delta)$ dans $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$.

Nous aurons ainsi les moyens de démontrer le principal résultat de ce paragraphe, c'est-à-dire le théorème 2. Enfin l'application stricte de l'hypothèse (H1) qui concerne des sommes trigonométriques d'un type précis nous contraint à des précautions qui sont l'objet du lemme 1 et qui compliquent légèrement, mais sans aucune conséquence sur les principaux résultats de ce travail, l'énoncé du théorème 2. Ces précautions concernent le choix de la boîte $\mathscr{B}$ puis celui de la variable P.

Lemme 2.1. *Il existe un sous-ensemble dense $\mathscr{S}$ de l'ensemble des boîtes $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ tel que, pour toute boîte $\mathscr{B}$ de $\mathscr{S}$, il existe un sous-ensemble* non borné *de* $\mathbf{R}$, *noté $\mathscr{P}(\mathscr{B})$ avec, pour tout P élément de $\mathscr{P}(\mathscr{B})$ et pour k égal à* 0 *ou* 1, *l'égalité suivante*

$$\mathbf{Z}^n \cap (\theta * 1_{P\mathscr{B}})^{-1}(\{k\}) = \mathbf{Z}^n \cap 1_{P\mathscr{B}}^{-1}(\{k\}) . \tag{2.1}$$

Remarque. Une explication romanesque du lemme 2.1 et de sa démonstration serait la suivante.

L'adoucissement de la fonction $1_{P\mathscr{B}}$ réalisé par le produit de convolution $\theta * 1_{PB}$, se produit au voisinage du bord de la boîte $P\mathscr{B}$. Si ce bord est à distance $> \frac{1}{3}$ du réseau $\mathbf{Z}^n$ et si l'adoucissement est suffisamment rapide (support de $\theta \subset \left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right]$, par exemple !) il ne concerne aucun point de $\mathbf{Z}^n$.

Démonstration du lemme 2.1. Une boîte $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ est un n-parallélépipède de côtés parallèles aux axes, ou encore $\mathscr{B} = \{x \in \mathbf{R}^n / (1 \leqslant i \leqslant n), a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$.

Considérant $E = \{(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in \mathbf{R}^{2n} / (1 \leqslant i \leqslant n), \quad a_i < b_i\}$, sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$, en bijection naturelle avec l'ensemble des boîtes $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$, on peut définir sur E une topologie évidente et donner un sens non moins évident à l'expression : « $\mathscr{S}$ est dense dans E ».

On peut aussi restreindre E par des conditions supplémentaires comme, par exemple:

$$\operatorname{Max}(b_i - a_i) < 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname*{Max}_i (|a_i|, |b_i|) < M .$$

Définissons alors l'ensemble $\mathscr{S} = \{B \in E \mid (a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ est une famille finie de nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}\}$.

Pour des raisons de dénombrabilité, $\mathscr{S}$ est dense dans E.

Soit maintenant $B \in \mathscr{S}$; le théorème de Kronecker (cf. Hardy and Wright, "The theory of numbers", Oxford Press, Théorème 444) dit justement que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble *non borné* de $\mathbf{R}$ que nous noterons $\mathscr{P}_\varepsilon(\mathscr{B})$ et tel que, pour tout $P \in \mathscr{P}_\varepsilon(\mathscr{B})$ et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on ait

$$\left[Pa_i - \frac{1}{2}\right] < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left[Pb_i - \frac{1}{2}\right] < \varepsilon$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$ et le support de θ inclus dans $\left[-\dfrac{1}{3}, +\dfrac{1}{3}\right]^n$, on se convaincra que

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid \theta * 1_{P\mathscr{B}}(x) \neq 1_{P\mathscr{B}}(x)\} = \emptyset$$

ce qui constitue le résultat de ce lemme. □

Définissons maintenant, pour $\Delta > 0$, l'ensemble

$$T(\Delta) = \{\xi \in \mathbf{A}^r \mid |\xi_\infty| Q(\xi) \leqslant P^{-d+\Delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant P^\Delta\}$$

où, mais il s'agit d'un rappel!

$$Q(\xi) = \prod_p \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p) .$$

Puisque nous avons $Q(\xi) \geqslant 1$, l'inégalité

$$|\xi_\infty| Q(\xi) \leqslant P^{-d+\Delta}$$

entraîne l'inégalité

$$|\xi_\infty| \leqslant P^{-d+\Delta}$$

et on obtient donc: $T(\Delta) \subset M(\Delta)$. Ces ensembles $T(\Delta)$ sont bien adaptés à l'hypothèse (H1) comme le montre le lemme suivant.

LEMME 2.2. *Avec les notations précédentes et sous l'hypothèse* (H1), *pour tout* $\xi \in \mathbf{A}^r$ *tel que*

(2.2) $$\pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta)),$$

où π *est la projection canonique de* $\mathbf{A}^r$ *sur* $(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r$, *on a, pour toute boîte* $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, *pour tout* $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'inégalité*

(2.3) $$|H(\xi)| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}.$$

Démonstration. Dans une première partie, on réécrit la somme $H(\xi)$ sous la forme d'une somme trigonométrique $S(\alpha)$ pour un α convenable.

Dans une seconde partie on applique l'hypothèse (H1) à cette somme $S(\alpha)$.

1re partie. Nous savons que, par définition, nous avons l'égalité

$$H(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \varphi(x)\, \psi\left(<\xi, f(x)>\right).$$

Puisque, pour tout entier premier p, on a $\varphi_p = 1_{\mathbf{Z}_p^n}$, la somme peut se réduire aux $x \in \mathbf{Z}^n$.

Puisque $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$ et $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$, l'égalité (2.1) nous permet d'écrire la relation

(2.4) $$H(\xi) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \psi_\infty\left(<\xi_\infty, f(x)>\right) \prod_p \psi_p\left(<\xi_p, f(x)>\right).$$

Suivant alors une remarque qui a déjà servi dans la démonstration du lemme 1.2, nous pouvons remplacer ξ_p par la partie polaire de son développement hensélien puisque $f(x) \in \mathbf{Z}^r$ et que le caractère ψ_p est trivial sur $\mathbf{Z}_p^r$.

Cette partie polaire s'écrit

$\dfrac{a_p}{q(\xi_p)} = \left(\dfrac{a_{p,1}}{q(\xi_p)}, \ldots, \dfrac{a_{p,r}}{q(\xi_p)}\right)$ avec les conditions qui la caractérisent

$$0 \leqslant a_{p,i} < q(\xi_p) \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$\operatorname{pgcd}(a_{p,1}, \ldots, a_{p,r}, p) = 1,$$

$$q(\xi_p) = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant r} (1, |\xi_{p,i}|_p).$$

On obtient alors l'égalité

(2.5) $$H(\xi) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left(2i\pi < -\xi_\infty + \sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)}, f(x)>\right).$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers p, tels que $q(\xi_p) > 1$ ou, ce qui est équivalent, $a_p \neq 0$, la somme figurant dans l'exposant ci-dessus a un sens.

De plus, pour ce nombre fini d'entiers premiers p, on a $q(\xi_p) = p^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 1$, donc le p.p.c.m. de différents $q(\xi_p)$ n'est autre que leur produit.

On obtient ainsi

$$\sum_p \frac{a_p}{q(\xi_p)} = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \qquad \text{(élément de } \mathbf{Q}^r\text{)}$$

avec

$$Q(\xi) = \prod_p q(\xi_p)$$

et

$$\operatorname{pgcd}(a_1(\xi), \ldots, a_r(\xi), Q(\xi)) = 1 \qquad \text{(on ne considère que les } a_i(\xi) \neq 0\text{)}$$

$$0 \leqslant a_i(\xi) < Q(\xi) \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Il vient donc

$$H(\xi) = \sum_{x \in P\mathscr{B} \cap \mathbf{Z}^n} \exp\left(2i\pi < -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}, f(x) >\right). \tag{2.6}$$

L'égalité (2.6) montre que la somme $H(\xi)$ est une somme trigonométrique $S(\alpha)$ pour $g = 0$ et $\alpha = \dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \xi_\infty$.

2e partie. Soit $\Delta > 0$, supposons que α, trouvé ci-dessus, soit dans le cas ii) de l'hypothèse (H1), c'est-à-dire qu'il existe $\dfrac{a}{q} = \left(\dfrac{a_1}{q}, \ldots, \dfrac{a_r}{q}\right)$ élément de $\mathbf{Q}^r$ tel que :

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant a_i < q && (1 \leqslant i \leqslant r),\\
&\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_r, q) = 1,\\
&1 \leqslant q \leqslant P^\Delta,\\
&\left|\alpha_i - \frac{a_i}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} && (1 \leqslant i < r).
\end{aligned}$$

L'ultime condition est équivalente à l'inégalité

$$\left| -\xi_\infty + \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q} P^{-d+\Delta}. \tag{2.7}$$

Considérons l'élément ζ de $\mathbf{A}^r$ tel que $\zeta = \xi - \dfrac{a(\xi)}{Q(\xi)} + \dfrac{a}{q}$.

Puisque, pour tout entier premier p, on a $\left(\xi - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)_p \in \mathbf{Z}_p^r$, on obtient

$$Q(\zeta) = Q\left(\frac{a}{q}\right) = q\,.$$

En conséquence, l'inégalité (2.7) devient

$$|\,\zeta_\infty\,|\,Q(\zeta) \leqslant P^{-d+\Delta}\,;$$

comme de plus

$$1 \leqslant q = Q(\zeta) \leqslant P^{\Delta}$$

on constate que $\zeta \in T(\Delta)$. Enfin, puisque $(\zeta - \xi) \in \mathbf{Q}^r$, on obtient

$$H(\xi) = H(\zeta) \quad \text{et} \quad \pi(\xi) \in \pi(T(\Delta))\,.$$

Si, maintenant, nous imposons la condition $\pi(\xi) \notin \pi(T(\Delta))$, alors, par contrapposée, α n'est pas dans le cas ii) de l'hypothèse (H1); il est donc dans le cas i), d'où l'inégalité

$$|\,H(\xi)\,| \ll P^{n-\Delta\Omega+\varepsilon}$$

qui achève cette démonstration. □

Nous avons encore besoin d'un majorant de la mesure de $T(\Delta)$ qui est l'objet d'un dernier lemme.

LEMME 2.3. *On a l'inégalité*

$$\mu(T(\Delta)) \leqslant P^{-rd+(r+1)\Delta}\,. \tag{2.8}$$

Démonstration. Dans la démonstration du lemme 2.2, nous avons vu que, $\xi \in \mathbf{A}^r$ étant donné, on connaît alors $\xi_\infty \in \mathbf{R}^r$ et $\frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \in \mathbf{Q}^r$, ce dernier ne dépendant que des ξ_p, pour tout p entier premier.

Réciproquement le couple $\left(\xi_\infty, \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}\right)$ définit ξ modulo $\prod_p \mathbf{Z}_p^r$.

Pour $\frac{a}{q} = \left(\frac{a_1}{q}, \ldots, \frac{a_r}{q}\right) \in \mathbf{Q}^r$ et tel que

$$0 \leqslant a_i < q\ (1 \leqslant i \leqslant r)\,,$$
$$\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_r, q) = 1\,.$$

On définit

$$T_{a,q}(\Delta) = \{ \xi \in \mathbf{A}^r \mid a(\xi) = a \quad \text{et} \quad Q(\xi) = q \\ \text{et} \quad |\xi_\infty| \, Q(\xi) \leqslant P^{-d+\Delta} \} .$$

Alors on obtient

$$\mu(T_{a,q}(\Delta)) = \mu_\infty(\{ x \in \mathbf{R}^r \mid |x| \leqslant \frac{1}{q} P^{-d+\Delta} \}) \prod_p \mu_p(\mathbf{Z}_p^r) = q^{-r} P^{-rd+r\Delta}$$

De plus, on vérifie facilement que pour $(a, q) \neq (a_1, q_1)$ on a

$$T_{a,q}(\Delta) \cap T_{a_1,q_1}(\Delta) = \emptyset$$

et on a aussi

$$T(\Delta) = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant P^\Delta} \bigcup_a T_{a,q}(\Delta) .$$

De ces trois dernières relations résulte le calcul suivant

$$\begin{aligned} \mu(T(\Delta)) &= \sum_{1 \leqslant q \leqslant P^\Delta} \sum_{\substack{0 \leqslant a_i < q \\ \operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_r, q) = 1}} q^{-r} P^{-rd+\Delta r} \\ &\leqslant \sum_{1 \leqslant q \leqslant P^\Delta} \sum_{0 \leqslant a_i < q} q^{-r} P^{-rd+r\Delta} \\ &\leqslant P^{-rd+(r+1)\Delta} ; \end{aligned}$$

le lemme 2.3 est donc démontré. □

Nous pouvons désormais démontrer le principal résultat de ce paragraphe 2.

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *pour toute boîte* $\mathscr{B} \in \mathscr{S}$, *pour tout* $P \in \mathscr{P}(\mathscr{B})$ *sous-ensemble non borné de* R, *pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}^r$, *pour tout* Δ *tel que* $0 < \Delta \leqslant \dfrac{rd}{r+1}$, *il existe* $\delta_2 > 0$ *tel que*

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(M(\Delta))} H(\xi) \, \psi(<\xi, -\nu>) \, d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}) .$$

Démonstration. Puisque $T(\Delta) \subset M(\Delta)$, il suffit de montrer que

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta))} |H(\xi)| \, d\xi = O(P^{n-rd-\delta_2}) .$$

Choisissons Δ tel que $0 < \Delta \leqslant \dfrac{rd}{r+1}$, puis définissons une suite

$$\Delta_0 = \Delta < \Delta_1 < \ldots < \Delta_N = \frac{rd}{r+1}$$

obtenue en fixant $\delta > 0$ tel que

$$\Omega - r - 1 > 2\delta\Delta^{-1} \tag{2.9}$$

et

$$\frac{1}{2}\delta > (r+1)(\Delta_{t+1} - \Delta_t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant N-1 . \tag{2.10}$$

Une telle suite existe puisque, en vertu de l'hypothèse (H2) on a $\Omega - r - 1 > 0$, et δ est d'autant plus petit que Δ est lui-même petit. Puis, δ étant choisi en fonction de l'inégalité (2.9), on peut définir $(\Delta_{t+1} - \Delta_t)$ à partir de l'inégalité (2.10) et obtenir enfin la valeur de N. Il est important de remarquer que δ et N sont indépendants de P.

La raison du choix de $\Delta_N = \dfrac{rd}{r+1}$ vient du calcul suivant et du lemme 2.2.

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |H(\xi)|\, d\xi \ll \int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r} P^{n - \Delta_N\Omega + \varepsilon}\, d\xi \ll P^{n - \frac{rd}{r+1}\Omega + \varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.9) donne

$$\frac{\Omega}{r+1} > 1 + \frac{2\delta}{(r+1)\Delta}$$

donc

$$\begin{aligned} n - \frac{rd}{r+1}\Omega + \varepsilon &< n - rd - 2\delta\frac{\Delta_N}{\Delta} + \varepsilon \\ &< n - rd - 2\delta + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r - \pi(T(\Delta_N))} |H(\xi)|\, d\xi \ll P^{n - rd - 2\delta + \varepsilon} \tag{2.11}$$

Par ailleurs, on calcule ce qui suit, pour chaque t tel que $0 \leqslant t \leqslant N-1$, et en utilisant les lemmes 2.2 et 2.3

$$\int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))-\pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)|\, d\xi \ll \int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))} P^{n-\Delta_t\Omega+\varepsilon}\, d\xi$$
$$\ll P^{-rd+(r+1)\Delta_{t+1}+n-\Delta_t\Omega+\varepsilon} \ll P^{n-rd+(r+1)(\Delta_{t+1}-\Delta_t)-\Delta_t(\Omega-r-1)+\varepsilon}$$

Mais l'inégalité (2.10) aidant ainsi que l'inégalité (2.9) qui entraîne

$$(\Omega-r-1)\,\Delta_t > (\Omega-r-1)\Delta > 2\delta\,.$$

On obtient l'inégalité

$$\int_{\pi(T(\Delta_{t+1}))-\pi(T(\Delta_t))} |H(\xi)|\, d\xi \ll P^{n-rd-\frac{3}{2}\delta+\varepsilon} \tag{2.12}$$

En réunissant l'inégalité (2.11) et les inégalités (2.12) dont le nombre N ne dépend pas de P, il vient

$$\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^r-\pi(T(\Delta))} |H(\xi)|\, d\xi \ll P^{n-rd-\frac{3}{2}\delta+\varepsilon}$$

On peut enfin choisir $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ et $\delta_2 = \delta$ pour achever la démonstration du théorème 2. □

Remarque. La démonstration du théorème 2 est classique: voir, par exemple, Birch lemme 4.4.

Remarque. Pour de grandes valeurs Δ, la restriction de la projection π à l'ensemble $T(\Delta)$ n'est pas injective.

Ceci ne présente aucun inconvénient pour la démonstration du théorème 2, puisque l'inégalité

$$\mu(T(\Delta)) \geqslant \mu[\pi(T(\Delta))]$$

est dans le bon sens.

Au contraire, au paragraphe 1, pour étudier l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi(M(\Delta))} H(\xi)d\xi$, il est indispensable d'avoir l'égalité

$$\mu(M(\Delta)) = \mu[\pi(M(\Delta))]$$

qui est obtenue si la projection π est injective sur $M(\Delta)$ et donc pour $\Delta < \dfrac{d}{3}$ en vertu du lemme 1.7.